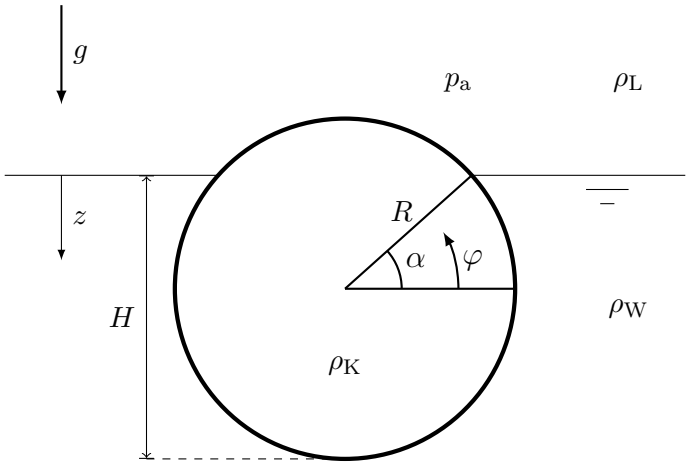
....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

12. 08. 2024

1. Aufgabe (10 Punkte)

Eine Kugel mit der homogenen Dichte ρ_K, Radius R und zugehörigem Volumen $V_\mathrm{K} = \frac{4}{3}\pi R^3$ schwimmt in Wasser mit der konstanten Dichte ρ_W. Dabei taucht die Kugel bis zur Tiefe $H > 0$ ein, so dass sich ein Eintauchwinkel α einstellt, siehe Skizze. Der Auftrieb in der Luft ist gegenüber des Auftriebs in Wasser zu vernachlässigen, d.h. $\rho_\mathrm{L}/\rho_\mathrm{w} = 0$.



a) Leiten Sie aus der folgenden statischen differentiellen Impulsbilanz, d.h. $\partial p/\partial z = \rho g$, einen Ausdruck für die Druckverteilung $p(z)$ in Abhängigkeit von der Tiefenkoordinate z für den Bereich $0 \leq z \leq H$ her.

b) Bestimmen Sie das Dichteverhältnis $\rho_\mathrm{K}/\rho_\mathrm{W}$ aus der Druckverteilung auf der Oberfläche der schwimmenden Kugel für den Bereich $0 \leq z \leq H$. Hinweis: Verwenden Sie dafür den Zusammenhang $z(\varphi) = H - R(1 + \sin(\varphi))$, um die gesamte Druckkraft mit der Druckverteilung aus a) zu berechnen.

c) Geben Sie auf Basis der Ergebnisse aus b) eine Formel für den Teil des Volumens der schwimmenden Kugel an, welcher für den Auftrieb nach dem Satz von Archimedes verantwortlich ist. Skizzieren Sie sorgfältig diesen Teil des Volumens der Kugel.

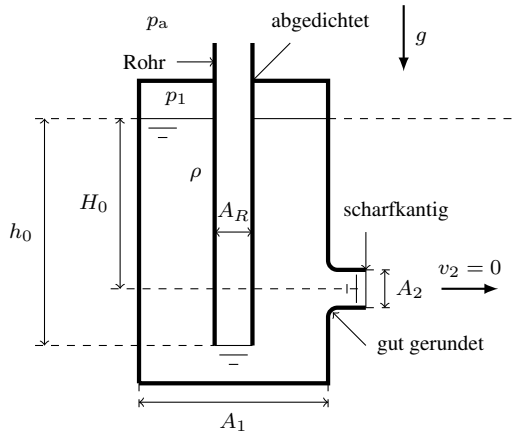
Gegeben:
$\rho_\mathrm{W}, \quad R, \quad H, \quad g, \quad p_\mathrm{a}$

Hinweis:

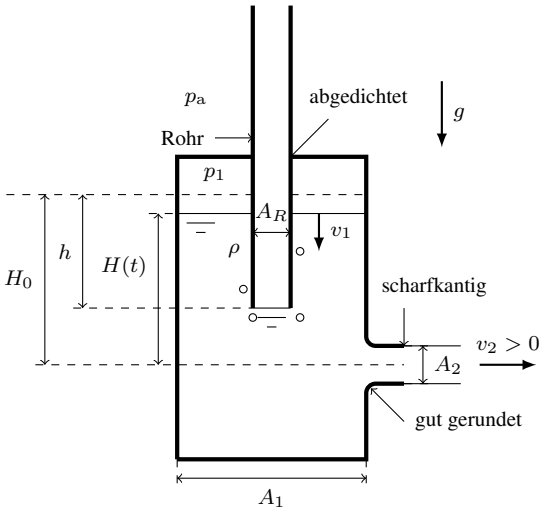
- Oberflächenspannung ist zu vernachlässigen.
- Das Oberflächenelement einer Kugel mit Radius R ist auf Grund der Rotationssymmetrie um die z-Achse durch $\mathrm{d}A = 2\pi R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ in Kugelkoordinaten gegeben.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Mit Hilfe eines in der Höhe vertikal verschiebbaren Rohres und einem Auslass mit Querschnittsfläche A_2 im unteren Bereich eines Behälters soll die Funktion eines Wasserhahns nachgeahmt werden. Dabei ist das Rohr stets bis zur Unterkante mit Luft gefüllt. Die Querschnittsfläche des Rohrs A_R ist gegenüber des Querschnittsfläche des Behälters A_1 zu vernachlässigen, so dass sich die Wasserspiegelhöhe beim vertikalen Verschieben des Rohrs nicht verändert. Der Umgebungsdruck p_a ist höhenunabhängig konstant und das Wasser hat die konstante Dichte ρ.



Skizze 1: Anfangszustand $t \leq t_0 = 0$



Skizze 2: Fließzustand $t_0 = 0 < t, h < h_0$

Im Anfangszustand in Skizze 1 ist das Rohr so tief eingetaucht, dass kein Fließen auftritt.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für den Druck im Inneren des Behälters p_1 und eine Bedingung für h_0 her, bei der gerade kein Wasser aus dem Behälter fließt.

Nun wird das Rohr bis zur Eintauchtiefe h gegenüber der Anfangswasserspiegelhöhe H_0 herausgezogen und dort festgehalten, so dass das Wasser aus dem Behälter über den Auslass ins Freie strömt und Luft über das Rohr in den Behälter nachfließt, siehe Skizze 2. Die Strömung ist verlustfrei und quasistationär.

b) Bestimmen Sie einen zeitabhängigen Ausdruck für die Wasserspiegelhöhe $H(t)$ im Behälter und die Zeitspanne $\Delta t = t_\infty - t_0$, in der Wasser aus dem Behälter fließt und die Wasserspiegelhöhe $H(t_\infty) = H_0 - h$ erreicht wird.

Gegeben:

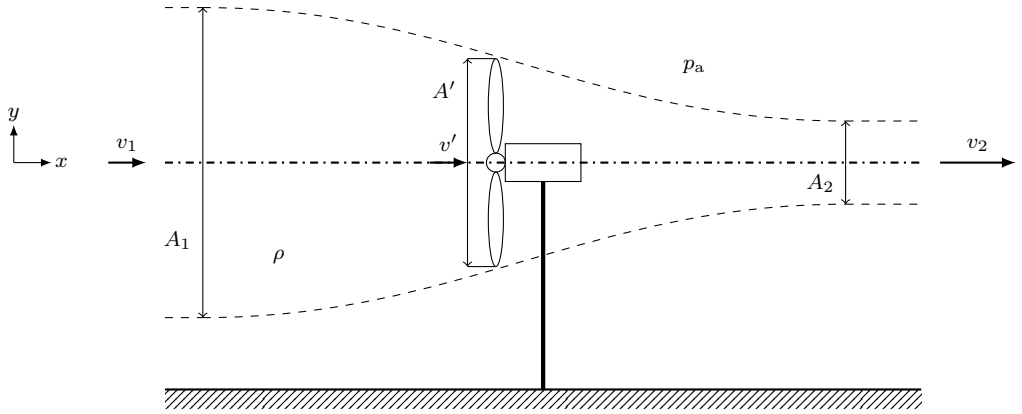
$\rho, \quad p_\mathrm{a}, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_R \ll A_1, \quad A_1 > A_2, \quad g, \quad H_0, \quad h$

Hinweis:

- Der Einfluss der Lufteinströmung und die einhergehende Blasenströmung über das Rohr und der Einfluss von Oberflächenspannung sind zu vernachlässigen.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Ein Propeller wird mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 und einem Fluid mit konstanter Dichte ρ angeströmt. Im Nachlauf wird die Geschwindigkeit v_2 gemessen. Es gelten die Voraussetzungen der vereinfachten Propeller- und Windradtheorie nach Froude und Rankine. Die Stromröhre ist gestrichelt skizziert und der Umgebungsdruck p_a ist höhenunabhängig konstant.



a) Nennen Sie vier Annahmen, die in der vereinfachten Propeller- und Windradtheorie nach Froude und Rankine getroffen werden.

b) Berechnen Sie die Querschnittsfläche A_2.

c) Berechnen Sie die Kraft F, die vom Propeller auf die Strömung wirkt.

d) Skizzieren Sie sorgfältig den qualitativen Verlauf der Geschwindigkeit $v(x)$ und des statischen Drucks $p(x)$ entlang der zentralen Achse in x-Richtung. Kennzeichnen Sie eindeutig die Werte der Geschwindigkeit und des Drucks am Einlass, im Porpellerquerschnitt und am Auslass.

Gegeben:

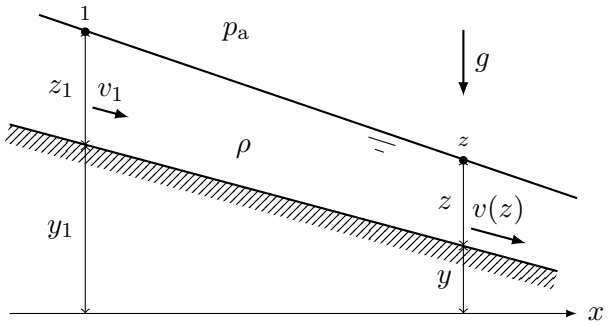
$\rho, \quad v_1, \quad v_2, \quad A'$

Hinweis:

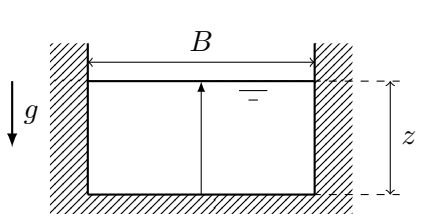
- Kennzeichnen Sie eindeutig die jeweils verwendeten Kontrollvolumina und eventuelle Bernoulli-Punkte.
- Sie dürfen das Froude'sche Theorem ohne Herleitung verwenden.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

4. Aufgabe (9 Punkte)

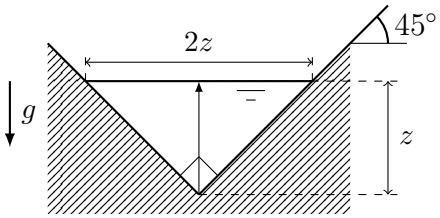
Es wird eine stationäre offene reibungsfreie Gerinneströmung mit Sohlenkoordinate y und Fluidtiefenkoordinate z analysiert. Das Fluid hat die konstante Dichte ρ, der Umgebungsdruck p_a ist höhenunabhängig konstant und der Volumenstrom beträgt $\dot{V} = \mathrm{const}$.



Die beiden Gerinneformen, das Rechteck-Gerinne in Skizze 1 und das Dreieck-Gerinne in Skizze 2, werden miteinander verglichen. Das Rechteck-Gerinne hat eine Breite B und das gleichschenklige Dreieck-Gerinne mit rechten Winkel im tiefsten Punkt eine obere Breite $2z$. Die Fluidtiefenkoordinate z ist wie für beide Gerinneformen nachfolgend skizziert definiert.



Skizze 1: Rechteck-Gerinne



Skizze 2: Dreieck-Gerinne

a) Leiten Sie für die offene Gerinneströmung im Rechteck-Gerinne in Skizze 1 einen Ausdruck für die totale Energiehöhe $H^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{Rechteck}}(y, z)$ und die Energiehöhe $H_{\mathrm{Rechteck}}(z)$ her.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ausdrucks für die Energiehöhe $H_{\mathrm{Rechteck}}(z)$ aus Aufgabe a) die Grenzfluidtiefe $z_{\mathrm{gr,Rechteck}}$ für den kritischen Zustand des Rechteck-Gerinnes.

c) Ermitteln Sie gleichermaßen einen Ausdruck für die totale Energiehöhe $H^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{Dreieck}}(y, z)$ und die Energiehöhe $H_{\mathrm{Dreieck}}(z)$ für das Dreieck-Gerinne in Skizze 2 und leiten Sie die zugehörige Grenzfluidtiefe $z_{\mathrm{gr,Dreieck}}$ her.

d) Skizzieren Sie sorgfältig den qualitativen Verlauf der Energiehöhe $H(z)$ in einem Diagramm mit H als Ordinate und z als Abszisse für beide Gerinneformen. Stellen Sie die relevanten Charakteristiken und Unterschiede der beiden Verläufe eindeutig dar.

Gegeben:

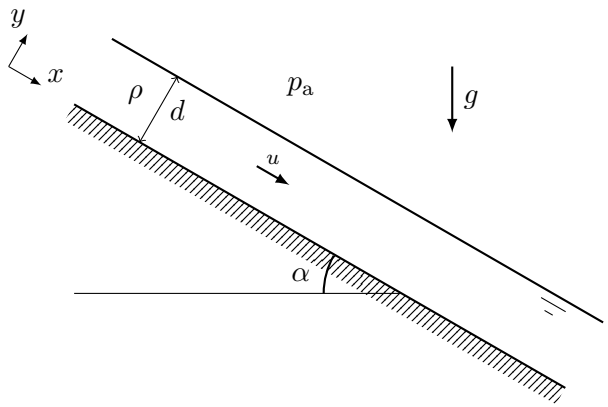
$g, \quad \dot{V}, \quad B$

Hinweis:

- Die notwendige Optimalitätsbedingung ist in Aufgabe b) und c) ausreichend.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

5. Aufgabe (11 Punkte)

Ein nicht-newtonsches Fluid mit der Schubspannungsverteilung $\tau(y)$ und der konstanten Dichte ρ fließt stationär, vollständig ausgebildet und laminar an einer schrägen ebenen Wand mit konstantem Neigungswinkel α entlang. Die konstante Dicke der Fluidschicht beträgt $d = \mathrm{const}_x$.



Die Schubspannungsverteilung ist nach negativer Konvention durch folgendes mechanisches Stoffmodell gegeben:

$$\tau = -K\sqrt{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}} \quad \text{für } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \geq 0$$

a) Leiten Sie anhand eines Volumenelements die Differentialgleichung zur Bestimmung der Schubspannungsverteilung $\tau(y)$ her. Skizzieren Sie sorgfältig das differentielle Element und die darauf wirkenden relevanten Kräfte.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$.

c) Bestimmen Sie den auf die Breite bezogenen Volumenstrom $\dot{V}/B$ sowie die mittlere Geschwindigkeit $\overline{u}$ und die maximale Geschwindigkeit u_max.

d) Um welche Art nicht-newtonsches Fluid handelt es sich hinsichtlich der Schergeschwindigkeitsabhängigkeit der Viskosität?

Gegeben:
$d, \quad g, \quad \rho, \quad \alpha, \quad K = \mathrm{const} > 0$

Hinweis:

- Der Umgebungsdruck p_a an der freien Oberfläche ist höhenunabhängig konstant und es gilt stets $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \geq 0$.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

6. Aufgabe (10 Punkte)

a) Geben Sie die definierende Gleichung für den Turbulenzgrad Tu an.

- Beschreiben Sie die Bedeutung bzw. Interpretation des Turbulenzgrades.
- Vereinfachen Sie den Turbulenzgrad für den Spezialfall isotroper Turbulenz.

b) Es ist ein instationäres zweidimensionales Strömungsfeld $\vec{\boldsymbol{v}}$ in kartesischen Koordinaten mit Geschwindigkeitskomponente u in x-Richtung und Geschwindigkeitskomponente v in y-Richtung gegeben. Hierbei stellen x und y die jeweiligen kartesischen Ortskoordinaten, und t die Zeitkoordinate dar.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = u\vec{\boldsymbol{e}}_x + v\vec{\boldsymbol{e}}_y \text{ mit } u = \mathrm{const} \text{ und } v = atx, \text{ wobei } a = \mathrm{const}$$

- Geben Sie die Differentialgleichung zur Ermittelung der Stromlinie im zweidimensionalen kartesischen Fall mit den Koordinaten in x- und y-Richtung an.
- Bestimmen Sie die Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ durch den Punkt mit den Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 > 0$ geht, in der Form $y_\mathrm{S}(x_\mathrm{S}|t \geq t_0)$.
- Skizzieren Sie sorgfältig die zuvor bestimmte Stromlinie für den Zeitpunkt t_0.

Gegeben: $a > 0, \quad u > 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 > 0, \quad t_0 > 0$

c) Gegeben ist der Impulsmomentensatz der Kontinuumsfluidmechanik in integraler Form (Drehimpulsbilanz) nach Euler'scher Betrachtungsweise für ein Kontrollvolumen $V(t)$ mit Kontrollfläche $\partial V(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V(t)} \rho\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\left[(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\partial V})\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}\right] = \int_{V(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{f}}\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V(t)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \left(\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}\right)$$

- Geben Sie für jeden der vier Summanden die qualitative Interpretation an.
- Welcher Term fällt bei zyklischer Stationarität zu Null weg?

Hinweis:

- Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.