

AERODYNAMISCHES INSTITUT  
der Rheinisch - Westfälischen  
Technischen Hochschule Aachen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

05. 09. 2024

M U S T E R L Ö S U N G  
E I N S I C H T N A H M E

**Hinweis:**

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

**Klausur Aerodynamik I**

Fragenteil, Biot-Savart, Tropfen-Theorie

# Integrale und Additionstheoreme

## Additionstheoreme

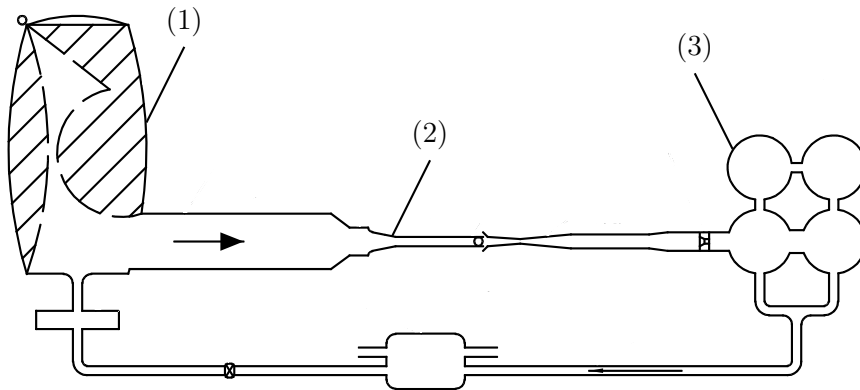
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

## Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$   
mit  $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral  
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

## 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

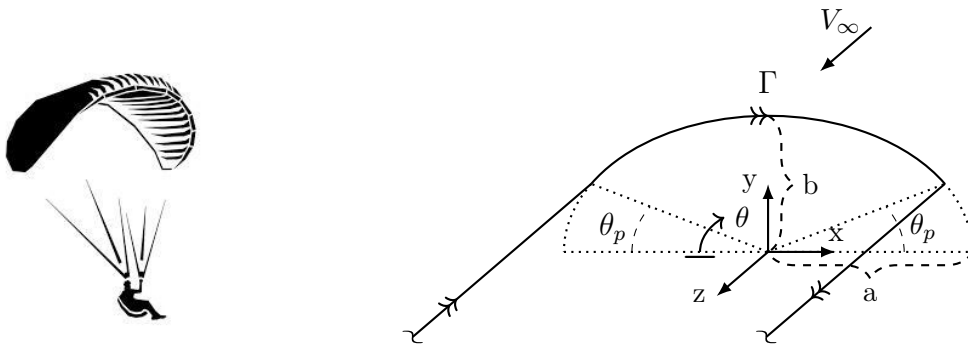
1. Nennen Sie drei Möglichkeiten, um im Rahmen der Methode der konformen Abbildungen die Profilgeometrie in der  $\zeta$ -Ebene zu verändern.
2. Unten abgebildet ist der trisonische Windkanal des Aerodynamischen Instituts der RWTH Aachen. In welchen Machzahlbereichen können mit diesem Windkanal Experimente durchgeführt werden? Benennen Sie die drei mit einer Linie versehenen Komponenten und beschreiben Sie kurz deren Zweck.



### 3. Skelett-Theorie

- (a) Nennen Sie die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Skelett-Theorie. Welche Größen lassen sich mithilfe der Skelett-Theorie berechnen und welche Einflussfaktoren werden berücksichtigt? Gehen Sie dabei besonders auf die Unterschiede zur Tropfen-Theorie ein.
  - (b) Erläutern Sie die kinematische Randbedingung der Skelett-Theorie.
4. Zeichnen Sie das NACA1412-Profil (Profiltropfen und Skelettlinie getrennt) und geben Sie die Bedeutung der Ziffern im Hinblick auf die Geometrie des Profils an. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Auftriebsbeiwertes  $C_l$  über den Anstellwinkel  $\alpha$  für:
    - (a) das NACA1412-Profil in einer inkompressiblen und reibungsbehafteten Strömung und
    - (b) den Verlauf einer angestellten ebenen Platte im Rahmen der Skelett-Theorie.
  5. Wozu dient die Prandtl-Glauert-Ackeret-Regel und was sind die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit? Wenden Sie die Prandtl-Glauert-Ackeret-Regel auf den Auftriebsanstieg  $\partial C_l / \partial \alpha$  einer ebenen Platte an und stellen Sie diesen Verlauf graphisch dar. Geben Sie die Werte für  $\partial C_l / \partial \alpha$  bei entsprechenden Vergleichsmachzahlen an und markieren Sie die Gültigkeitsbereiche in der Skizze.

## 2. Aufgabe: Biot-Savart (18 Punkte)



Im Folgenden wird das Wirbelsystem eines Paragliders im Vorwärtsflug betrachtet in einem Flugzustand, in dem Auftrieb erzeugt wird. Die Schirmkappe wird vereinfachend als starr angenommen und deren Form durch ein Ellipsensegment angenähert. Das zugehörige Wirbelsystem, bestehend aus zwei halbunendlichen freien Wirbeln und dem gebundenen Wirbel kann der obigen Abbildung entnommen werden.

- Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart-Gesetzes (siehe Hinweise) ausgehend von einer Skizze die Gleichung

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi R} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

für den induzierten Geschwindigkeitsbetrag einer geraden endlichen Wirbellinie her.

- Betrachten Sie in Anlehnung an den gebundenen Wirbel des oben dargestellten Paragliders einen Wirbel mit Zirkulation  $\Gamma$ , der entlang des Segmentes  $[\theta_1, \theta_2]$  einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  verläuft. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart-Gesetzes (siehe Hinweise) die Gleichung

$$u_{i,y} = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 + z^2]^{-3/2} a z \sin \theta d\theta$$

für die durch einen solchen Wirbel im Punkt  $P'$   $(0, 0, z)$  induzierte Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung her. Leiten Sie hierfür zunächst die Formel für den Geschwindigkeitsvektor in einem beliebigen Punkt  $P(x, y, z)$  her und reduzieren diese auf den gefragten Sonderfall. Verwenden Sie das gegebene kartesische Koordinatensystem mit Ursprung im Zentrum der Ellipse und die gegebene Definition für den Parameter  $\theta$  und dessen Drehrichtung (siehe Abbildung).

- Lösen Sie das im vorigen Aufgabenteil hergeleitete Integral unter Berücksichtigung der Hinweise für die konkrete Geometrie des Paragliders und bestimmen Sie die durch das gesamte Wirbelsystem im Punkt  $P'$   $(0, 0, z)$  induzierte Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung. Nehmen Sie die Koordinate  $z$  als gegeben an.

Gegeben:  $\Gamma, a, b, \theta_p, z$

Hinweise:

- Allgemeine Form des Biot-Savart-Gesetzes:  $d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3}$
- Parameterdarstellung des Ellipsensegmentes:  $\vec{e} = -a \cos \theta \vec{e}_x + b \sin \theta \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$
- Unbestimmtes Integral:

$$\int \frac{\sin \theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{-\sqrt{2} \cos \theta}{(b^2 + z^2) \sqrt{(a^2 - b^2) \cos 2\theta + a^2 + b^2 + 2z^2}} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

### 3. Aufgabe: Tropfen-Theorie (17 Punkte)

Es wird die Strömung um einen dünnen Profiltropfen mit der Anströmgeschwindigkeit  $u_\infty$  ohne Anstellwinkel untersucht. Die Form des Profiltropfens  $Z^{(t)}(X)$  wird durch die Gleichung

$$Z^{(t)}(X) = 0.2\sqrt{X - X^2}(2 - X + X^2) \quad \text{mit } X = x/l \text{ und } Z^{(t)} = z^{(t)}/l$$

beschrieben, wobei  $l$  die Sehnenlänge darstellt.

1. Leiten Sie anhand einer Skizze die Bestimmungsgleichung für die Quellverteilung  $q(X) = 2u_\infty \frac{dZ}{dX}$  her.
2. Bestimmen Sie alle Koeffizienten  $b_n$  aus dem Fourieransatz nach Riegels für den obigen Profiltropfen.
3. Bestimmen Sie die Quellverteilung  $q(\varphi)$  für den gegebenen Profiltropfen und skizzieren Sie sorgfältig deren Verlauf.
4. Leiten Sie aus dem folgenden Ansatz des induzierten Geschwindigkeitsbetrags im Punkt  $P$

$$dv_{i,P} = \frac{q(x)dx}{2\pi r} \quad \text{mit } r \text{ als Abstand des Punktes } P \text{ zur Quelle } q(x)dx$$

die Beziehung für die dimensionslose induzierte Axialstörgeschwindigkeit

$$u_a(X) = u(X)/u_\infty = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

her und bestimmen Sie diese für das gegebene Profil.

5. Diskutieren Sie die Bedeutung des Riegelsfaktors (ohne Rechnung).

Gegeben:  $u_\infty$

Hinweise:

Verwenden Sie folgende Transformationsregel:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

Fourier'scher Reihenansatz nach Riegels:

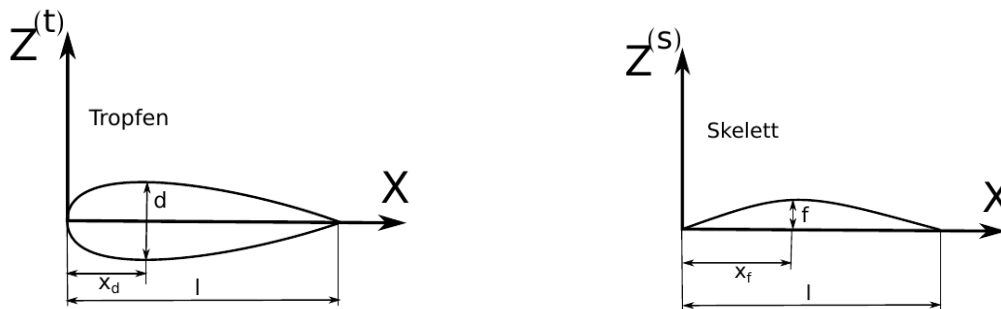
$$Z^{(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi')$$

Winkelbeziehungen:

$$\sin(3\varphi) = 3 \sin(\varphi) - 4 \sin^3(\varphi)$$

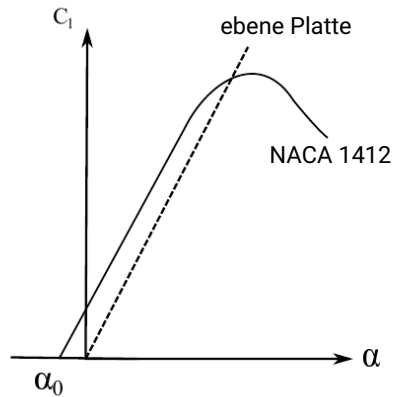
## Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. (a) Verschieben des Zentrums des Kreises in x-Richtung.  
 (b) Verschieben des Zentrums des Kreises in y-Richtung.  
 (c) Verändern des Radius des Kreises in der z-Ebene.  
 (d) Verwenden einer anderen konformen Abbildungsfunktion.
2. Mit dem trisonischen Windkanal des Aerodynamischen Instituts können Experimente im subsonischen, transsonischen und supersonischen Machzahlbereich durchgeführt werden.
  - (a) Bei Komponente (1) handelt es sich um den Luftsack. Der Zustand der Luft im Luftsack gibt die Ruhegrößen des Windkanals vor.
  - (b) Bei Komponente (2) handelt es sich um die verstellbare Lavaldüse. Diese expandiert die Luft auf die in der Messstrecke geforderte Machzahl.
  - (c) Bei Komponente (3) handelt es sich um den Vakuumkessel. Dieser stellt die nötige Druckdifferenz her, um für einen hinreichend großen Zeitraum die geforderte Machzahl in der Messstrecke aufrechtzuerhalten.
3. (a) Die Skelett-Theorie geht von unendlich dünnen Profilen, kleinen Anstellwinkeln, kleiner Wölbung und inkompressibler, stationärer und rotationsfreier Strömung aus. Es wird der Anstellwinkel- und Wölbungseinfluss des Profils auf die Umströmung dargestellt. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Auftriebsbeiwert des Profils ermitteln. Im Gegensatz zur Tropfentheorie wird der Verdrängungseffekt des Profils vernachlässigt.  
 (b) Die kinematische Strömungsbedingung besagt, dass die Skelettlinie eine Stromlinie ist. Der resultierende Geschwindigkeitsvektor an der Skelettlinie ist tangential zu dieser, die Geschwindigkeitskomponente normal zur Skelettlinie muss verschwinden.
4. (a) Profiltropfen und Skelettlinie:



- (b) NACA1412:  
 1% maximale Wölbung ( $f$ ) in Prozent der Profiltiefe  
 40% Wölbungsrücklage ( $x_f$ ) in Prozent der Profiltiefe  
 12% maximale Dicke ( $d$ ) in Prozent der Profiltiefe  
 Die Dickenrücklage ( $x_d$ ) für alle Profile der 4-er Reihe liegt bei 30% der Profiltiefe.

(c) Auftriebsbeiwert:

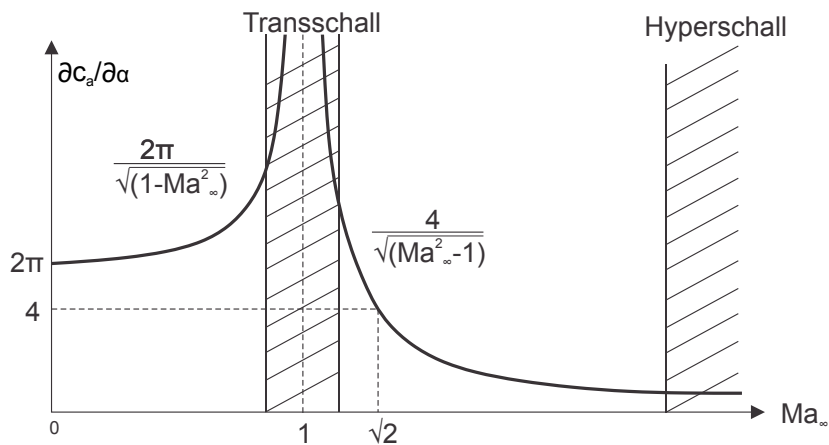


5. Die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel erlaubt eine Übertragung von vorhandenen Daten bei Vergleichsmachzahlen auf Strömungen bei anderen Machzahlen. Voraussetzungen sind schlanke Körper, geringe Anstellwinkel und drehungsfreie Strömung. Weiterhin ist die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel lediglich für  $Ma_\infty \lesssim 0.7$  bzw. im Bereich  $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$  gültig.

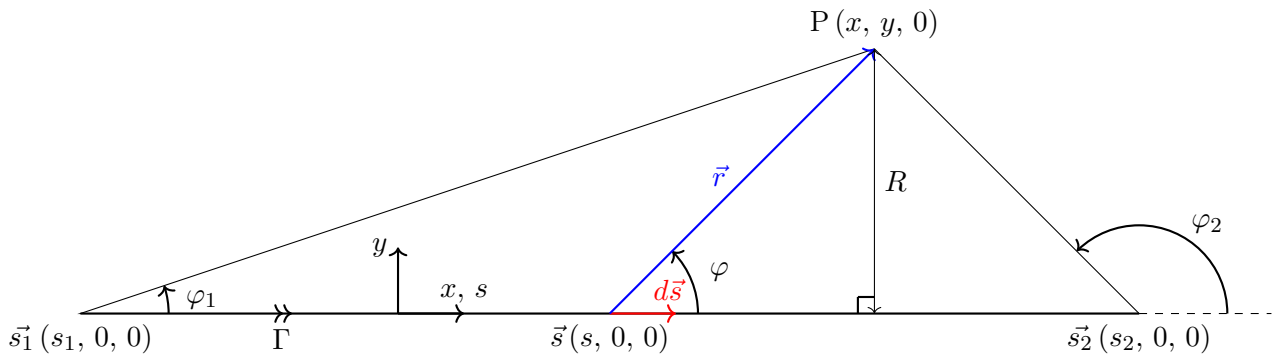
Nach der Prandtl-Glauert-Ackeret Regel wird der Auftriebsanstieg für eine kompressible Strömung aus der Skalierung der Steigung des Auftriebsbeiwertes bei Vergleichsmachzahlen bestimmt.

Vergleichsmachzahlen:

$Ma_v = 0$  für  $Ma_\infty \lesssim 0.7$  mit  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} |_{Ma_v=0} = 2\pi$  (aus der Theorie der konformen Abbildungen),  $Ma_v = \sqrt{2}$  für  $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$  mit  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} |_{Ma_v=\sqrt{2}} = 4$  (aus der Theorie dünner Flügel) Der Skalierungsfaktor ist  $\frac{1}{\sqrt{|1-Ma_\infty^2|}}$ .



## Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (18 Punkte)



1. Bilde Betrag des infinitesimalen Geschwindigkeitsvektors:

$$\|\vec{u}_i\| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\|\vec{r} \times d\vec{s}\|}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\|\vec{r}\| \|d\vec{s}\| \sin \varphi}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{\Gamma \sin \varphi}{4\pi \|\vec{r}\|^2} ds$$

mit  $\|d\vec{s}\| \equiv ds$ . Integriere über Wirbellinie:

$$\|\vec{u}_i\| = \int_{s_1}^{s_2} \|d\vec{u}_i\| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sin \varphi}{\|\vec{r}\|^2} ds$$

Substitutionsregel der Integralrechnung:

$$ds = \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \frac{R}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

mit

$$s = x - \frac{R}{\tan \varphi}$$

aus der obigen Abbildung. Es folgt ebenfalls aus der beigefügten Abbildung, dass

$$\|\vec{r}\| = \frac{R}{\sin \varphi}.$$

Einsetzen in Integral ergibt

$$\|\vec{u}_i\| = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi R} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

2. Ausgangspunkt ist Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{u}_i = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Position eines Wirbelements auf Ellipse:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ b \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Substitutionsregel der Integralrechnung:

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{s}}{d\theta} d\theta = \begin{pmatrix} a \sin \theta \\ b \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta.$$



Distanzvektor zwischen Position des Wirbelelements und Punkt P(x, y, z):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x + a \cos \theta \\ y - b \sin \theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Betrag des Distanzvektors:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(x + a \cos \theta)^2 + (y - b \sin \theta)^2 + z^2}.$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{r} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x + a \cos \theta & y - b \sin \theta & z \\ a \sin \theta & b \cos \theta & 0 \end{vmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} -bz \cos \theta \\ az \sin \theta \\ (x + a \cos \theta)b \cos \theta - (y - b \sin \theta)a \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

Einsetzen in Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{u}_i = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(x + a \cos \theta)^2 + (y - b \sin \theta)^2 + z^2]^{-3/2} \begin{pmatrix} -bz \cos \theta \\ az \sin \theta \\ [x + a \cos \theta]b \cos \theta - [y - b \sin \theta]a \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

Für Punkte auf der z-Achse gilt:

$$x = 0 \qquad y = 0.$$

Somit folgt für die y-Komponente der auf der z-Achse von einem ellipsenförmigen Wirbel induzierten Geschwindigkeit die Formel aus der Aufgabenstellung:

$$u_{i,y} = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 + z^2]^{-3/2} az \sin \theta d\theta$$

3. Für die konkrete Geometrie des Paragliders gilt:

$$\theta_1 = \theta_p \qquad \theta_2 = \pi - \theta_p.$$

Unter Beachtung der Hinweise kann das im vorigen Aufgabenteil hergeleitete Integral gelöst werden:

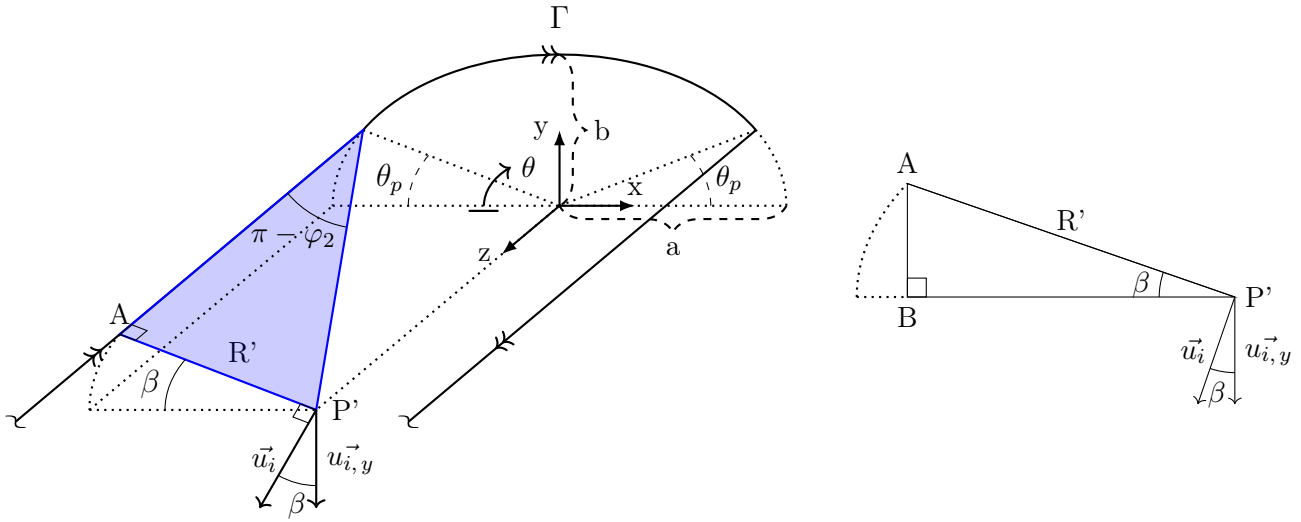
$$\begin{aligned} u_{i,y} &= \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{az \sin \theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{-\sqrt{2}az \cos(\pi - \theta_p)}{(b^2 + z^2)\sqrt{(a^2 - b^2) \cos(2\pi - 2\theta_p) + a^2 + b^2 + 2z^2}} + \\ &+ \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{-\sqrt{2}az \cos \theta_p}{(b^2 + z^2)\sqrt{(a^2 - b^2) \cos 2\theta_p + a^2 + b^2 + 2z^2}} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{2}az \cos \theta_p}{(b^2 + z^2)\sqrt{(a^2 - b^2) \cos 2\theta_p + a^2 + b^2 + 2z^2}}. \end{aligned}$$

Die durch das gesamte Wirbelsystem induzierte Geschwindigkeit wird erhalten durch Superposition der Integrale über den linken freien Wirbel, den gebundenen Wirbel und den rechten freien Wirbel. Es folgt, dass

$$\vec{u}_i = \frac{-\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{FW,L} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{GW} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{FW,R} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Der Beitrag des gebundenen Wirbels wurde bereits weiter oben berechnet:

$$\frac{-\Gamma}{4\pi} \int_{GW} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{2}az \cos \theta_p}{(b^2 + z^2)\sqrt{(a^2 - b^2) \cos 2\theta_p + a^2 + b^2 + 2z^2}}.$$



Der linke und der rechte freie Wirbel induzieren im Punkt  $P'$  wegen der Symmetrie des Problems identische Geschwindigkeitskomponenten in  $y$ -Richtung. Die Berechnung dieser Komponenten erfolgt mithilfe der im 1. Aufgabenteil hergeleiteten Gleichung. Die Größen  $R'$ ,  $\cos \varphi_1$  und  $\cos \varphi_2$  folgen aus der Geometrie. Die Rechnung wird für den linken freien Wirbel dargestellt. Alle Winkel und Distanzen können der beigefügten Abbildung entnommen werden. Da es sich um einen halbunendlichen Wirbel handelt, folgt

$$\varphi_1 \rightarrow 0 \implies \cos \varphi_1 \rightarrow 1.$$

$\cos \varphi_2$  folgt aus dem in der Abbildung eingezeichneten Dreieck:

$$\cos \varphi_2 = -\cos(\pi - \varphi_2) = -\frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2 \sin^2 \theta_p + a^2 \cos^2 \theta_p}}.$$

Der Abstand  $R'$  folgt ebenfalls aus der Abbildung und ist gegeben durch

$$R' = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta_p + b^2 \sin^2 \theta_p}.$$

Für den Betrag der durch einen der beiden freien Wirbel induzierten Geschwindigkeit gilt somit:

$$\|u_{i, \vec{FW}}\| = \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{a^2 \cos^2 \theta_p + b^2 \sin^2 \theta_p}} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2 \sin^2 \theta_p + a^2 \cos^2 \theta_p}} \right).$$

Die Komponente in  $y$ -Richtung folgt aus der Abbildung und ist gegeben durch

$$u_{i, FW, y} = -\cos \beta \|u_{i, \vec{FW}}\|.$$

Hinweis: An dieser Stelle ist es wichtig, zwischen dem Parameter  $\theta$  und dem Winkel  $\beta$  zu unterscheiden. Der Parameter  $\theta$  beschreibt Positionen entlang der Ellipse und beschreibt nur im Sonderfall  $a = b$ , also für Kreise, physikalische Winkel. Deswegen ist der Wert des Winkels  $\beta$  auch verschieden von jenem des Parameters  $\theta_p$ . In dieser Aufgabe wird nur der Cosinus von  $\beta$  benötigt. Dieser folgt aus der Abbildung oben und ist gegeben durch:

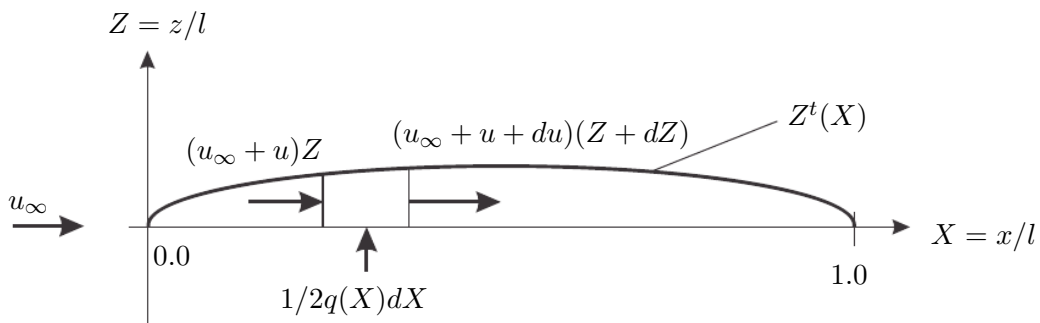
$$\cos \beta = \frac{\|B\vec{P}'\|}{R'} = \frac{a \cos \theta_p}{R'}$$

Für das gesamte Wirbelsystem folgt daraus:

$$u_{i,y} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{2}az \cos \theta_p}{(b^2 + z^2)\sqrt{(a^2 - b^2) \cos 2\theta_p + a^2 + b^2 + 2z^2}} - \frac{\Gamma a \cos \theta_p}{2\pi(a^2 \cos^2 \theta_p + b^2 \sin^2 \theta_p)} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2 \sin^2 \theta_p + a^2 \cos^2 \theta_p}} \right).$$

### Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (17 Punkte)

1. (a) Mithilfe der Kontinuitätsgleichung:



$$(u_\infty + u)Z + \frac{1}{2}q(X)dX = (u_\infty + u + du)(Z + dZ)$$

$$u_\infty Z + uZ + \frac{1}{2}q(X)dX = u_\infty Z + uZ + duZ + u_\infty dZ + udZ + dudZ$$

Nach der Linearisierung (Vernachlässigung Terme 2. Ordnung) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}q(X) = Z \frac{du}{dX} + u_\infty \frac{dZ}{dX} + u \frac{dZ}{dX} = \frac{d(u_\infty + u)}{dX} Z + (u_\infty + u) \frac{dZ}{dX}$$

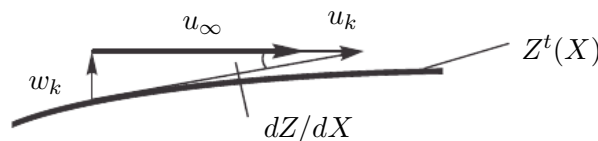
aus der Produktregel folgt:

$$\frac{1}{2}q(X) = \frac{d}{dX}((u_\infty + u)Z)$$

und mit  $u_\infty \gg u$  (nicht gültig im Staupunkt) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q(X) &= \frac{d(u_\infty Z)}{dX} = u_\infty \frac{dZ}{dX} \\ q(X) &= 2u_\infty \frac{dZ}{dX} \end{aligned}$$

(b) Alternativ mithilfe der kinematischen Randbedingung:



$$\frac{dZ}{dX} = \frac{w_k}{u_\infty + u_k}$$

Für dünne Profile und außerhalb des Staupunktes gilt  $u_k \ll u_\infty$ .

Außerdem gilt  $w_k \approx \frac{q(X)}{2}$ .

Somit ergibt sich für die Quellendichte  $q(X)$ :

$$q(X) = 2u_\infty \frac{dZ}{dX}$$

2. Zunächst folgt mit  $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$  die Transformation von  $Z(X)$  in  $Z(\varphi)$ , wobei  $\sin(\varphi) = 2\sqrt{X - X^2}$  gilt.

$$\begin{aligned} Z(\varphi) &= 0.1 \sin(\varphi) \left( 2 - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) + \left( \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) \right)^2 \right) \\ Z(\varphi) &= 0.1 \sin(\varphi) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) \right) \\ Z(\varphi) &= 0.1 \sin(\varphi) \left( \frac{7}{4} + \frac{1}{4} (1 - \sin^2 \varphi) \right) \\ Z(\varphi) &= 0.2 \sin(\varphi) - \frac{1}{40} \sin^3 \varphi \quad \text{mithilfe des Hinweises folgt:} \\ Z(\varphi) &= 0.2 \sin(\varphi) - \frac{1}{40} \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{40} \frac{1}{4} \sin(3\varphi) \\ Z(\varphi) &= \frac{29}{160} \sin \varphi + \frac{1}{160} \sin(3\varphi) \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich zu:

$$b_1 = \frac{29}{80}; \quad b_2 = 0; \quad b_3 = \frac{1}{80} \quad b_n = 0 \quad \forall \quad n \geq 4$$

3. Die Quellverteilung  $q(\varphi)$  ergibt sich aus der Transformation mit  $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$  zu

$$q(\varphi) = 2u_\infty \frac{dZ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX}$$

wobei

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dX} = \frac{-2}{\sin(\varphi)}$$

gilt. Die Ableitung  $\frac{dZ}{d\varphi}$  ergibt sich aus der Fourier-Reihe zu

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi) \quad .$$

Für  $q(\varphi)$  folgt

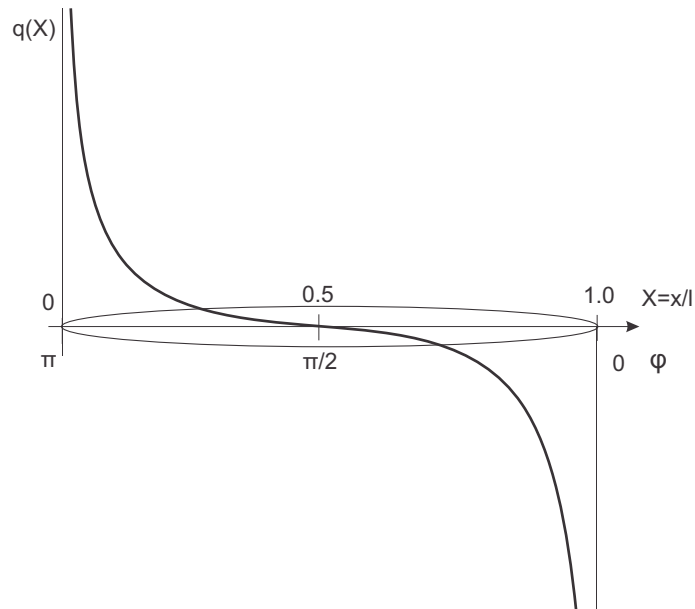
$$q(\varphi) = -2u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\cos(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \quad .$$

Nach Einsetzen der Koeffizienten  $b_n$  ergibt sich somit

$$q(\varphi) = -u_\infty \left( \frac{29 \cos(\varphi)}{40 \sin(\varphi)} + \frac{3 \cos(3\varphi)}{40 \sin(\varphi)} \right)$$

Alternativ kann zunächst  $q(X)$  bestimmt werden und anschließend transformiert werden.

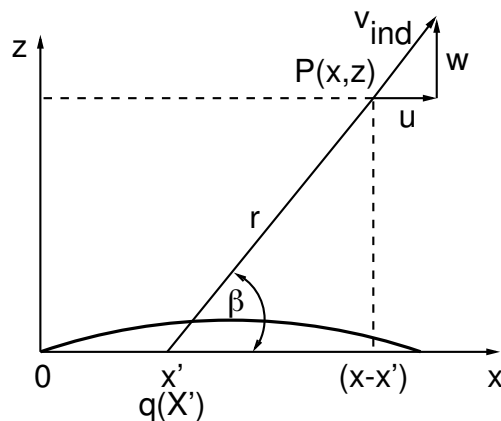
Bei der Skizze von  $q(\varphi)$  muss die Schließungsbedingung und das divergente Verhalten in der Nase und an der Hinterkante beachtet werden!



4. Die induzierte Axialstörgeschwindigkeit lässt sich aus der Quell-/Senkenverteilung mit

$$dv_{ind} = \frac{q(x)dx}{2\pi r}$$

herleiten.



Es gilt:

$$r = \sqrt{Z^2 + (X - X')^2} \quad \text{ sowie } \quad du_{ind} = \frac{X - X'}{r} dv_{ind}$$

somit folgt für die in Punkt P induzierte Axialstörgeschwindigkeit  $u(X, Z)$ :

$$u(X, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(X')(X - X')dX'}{Z^2 + (X - X')^2}$$

für dünne Profile  $Z \rightarrow 0$  kann der Term umgeschrieben werden

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

bzw.

$$u_a(X) = \frac{u(X)}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

Zur Berechnung von  $u_a(X)$  kann  $q(X')$  eingesetzt werden:

$$u_a(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dZ}{dX'} \frac{dX'}{X - X'}$$

Mit der Koordinatentransformation nach  $\varphi$  und der entsprechenden Anpassung der Integrationsgrenzen folgt:

$$u_a(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^0 \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'}$$

Mit der oben berechneten Ableitung der Fourier-Reihe ergibt sich

$$u_a(\varphi) = \sum_{n=1}^N b_n n \frac{-1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\varphi')}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi'$$

Unter Verwendung des Glauert-Integrals folgt:

$$u_a(\varphi) = \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$$

Nach Einsetzen der Koeffizienten  $b_n$  ergibt sich somit

$$u_a(\varphi) = \frac{29}{80} + \frac{3}{80} \frac{\sin(3\varphi)}{\sin \varphi} .$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$u_a(\varphi) = \frac{19}{40} - \frac{3}{20} \sin^2(\varphi)$$

Die Rücktransformation in  $X$  erfolgt mit  $\sin(\varphi) = 2\sqrt{X - X^2}$ . Somit ergibt sich

$$u_a(X) = \frac{19}{40} - \frac{3}{5}(X - X^2)$$

5. Physikalisch ergibt sich in der Profilnase ein Staupunkt mit  $u_{\infty} + u(0) = 0$ . Entsprechend ist dort die Annahme, dass  $u_{\infty} \gg u$  gilt, nicht mehr erfüllt und die entsprechende Quellstärkenverteilung geht gegen unendlich. Zur Korrektur wird der Riegelsfaktor  $\kappa$  mit der Geschwindigkeit multipliziert.