....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

28. 03. 2022

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht am Ölstandssensor:

$$F = F_A - F_G$$

$$F = p_a l^2 + \rho_O g\,(h+l)\,l^2 - \rho_O g h \left(l^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right) - \rho_S g l^3 - p_a l^2$$

$$F = \rho_O g l^3 + \rho_O g h \pi \frac{d^2}{4} - \rho_S g l^3 \qquad \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

b) Für ΔV gilt:

$$\Delta V = \Delta h \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} + t\frac{\pi d^2}{4} = (h^* - h)\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} + t\frac{\pi d^2}{4}$$

Die verbliebene Füllhöhe t des Öls im Einfüllstutzen kann über das Kräftegleichgewicht berechnet werden:

$$F_G = F_A$$
$$\rho_S g l^3 = \rho_O g(h^* + l)l^2 - \rho_O g h^*(l^2 - \frac{\pi d^2}{4}) - \rho_O g t\frac{\pi d^2}{4}$$

Umstellen nach t liefert:

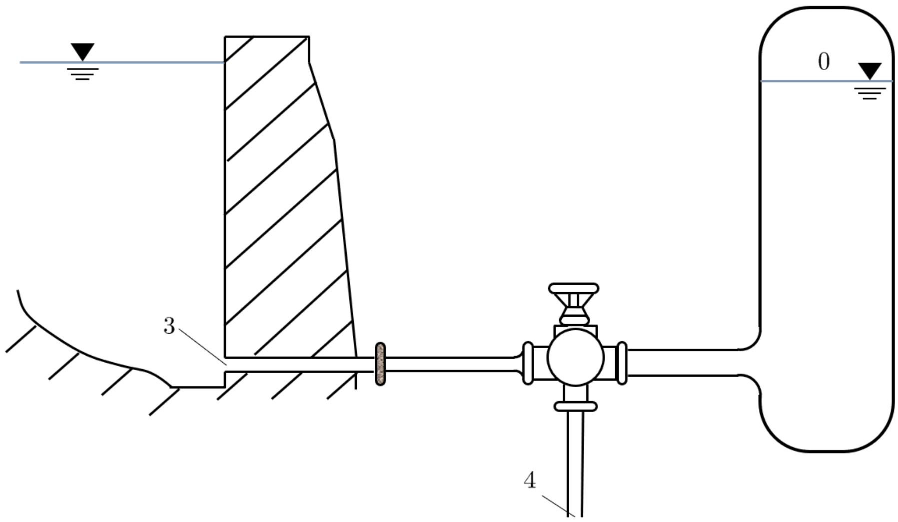
$$t = \frac{4l^3}{\pi d^2} + h^* - \frac{4l^3}{\pi d^2}\frac{\rho_S}{\rho_O}$$

Somit ergibt sich für ΔV:

$$\Delta V = (h^* - h)\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} + l^3(1 - \frac{\rho_S}{\rho_O}) + \frac{\pi d^2}{4}h^*$$

2. Aufgabe

a) Bernoulli $\boxed{0} \rightarrow \boxed{3}$:



$$p_T + \rho g H = p_a + \rho g t + \tfrac{\rho}{2} v_3^2 + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(2\lambda \frac{l}{d} + \zeta_S\right) + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_V + \lambda \frac{l}{D}\right)$$

$$\Rightarrow p_T + \rho g H = p_a + \rho g t + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + 2\lambda \frac{l}{d} + \zeta_S + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_V + \lambda \frac{l}{D}\right]\right)$$

Umstellen nach p_T ergibt:

$$\leftrightarrow p_T = p_a - \rho g (H - t) + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + 2\lambda \frac{l}{d} + \zeta_S + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_V + \lambda \frac{l}{D}\right]\right)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = v_3 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = v_1 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ folgt:

$v_3 = v_1 \frac{D^2}{d^2}$

$$\leftrightarrow p_T = p_a - \rho g (H - t) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{16 \dot{V}^2}{\pi^2 d^4}\right) \cdot \left(1 + 2\lambda \frac{l}{d} + \zeta_S + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_V + \lambda \frac{l}{D}\right]\right) \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

b) Stationäre Endgeschwindigkeit über das Theorem von Torricelli:

$$v_{4,end} = \sqrt{2 \frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H + l)}$$

instationärer Bernoulli $\boxed{0} \rightarrow \boxed{4}$:

$$p_T + \rho g (H + l) = p_a + \tfrac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial t} ds + \rho \int_0^l \frac{\partial v_4}{\partial t} ds$$

Mit dem Hinweis $l \gg D$ ergibt sich: $\int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial t} ds = \int_0^l \frac{dv_1}{dt} ds \qquad \& \qquad \int_0^l \frac{\partial v_4}{\partial t} ds = \int_0^{4l} \frac{dv_4}{dt} ds$

Die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_4 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow v_1 = v_4 \frac{d^2}{D^2} \qquad ; \qquad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_4}{dt} \frac{d^2}{D^2}$$

Nach Einsetzen folgt: $\Rightarrow p_T + \rho g(H+l) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \int_0^l \frac{dv_4}{dt} \frac{d^2}{D^2} ds + \rho \int_0^l \frac{dv_4}{dt} ds$

$$\Rightarrow p_T + \rho g(H+l) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \frac{dv_4}{dt} l \left(\frac{d^2}{D^2} + 1 \right)$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt:

$$\frac{2\frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H+l) - v_4^2}{2l\left(\frac{d^2}{D^2} + 1\right)} = \frac{dv_4}{dt}$$

$$dt = \frac{2l\left(\frac{d^2}{D^2} + 1\right) dv_4}{2\frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H+l) - v_4^2}$$

Unter Berücksichtigung des Hinweises berechnet sich a^2 zu $a^2 = 2\frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H+l)$

und es folgt für die Integration $a > |v_4|$, da $v_{4,end} = a$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2l\left(\frac{d^2}{D^2} + 1\right)}{2\sqrt{2\frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H+l)}} ln\left(\frac{v_{4,end} + v_4}{v_{4,end} - v_4}\right)$$

Einsetzen der Bedingung $v_4 = 0,7 \cdot v_{4,end}$ ergibt:

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2l\left(\frac{d^2}{D^2} + 1\right)}{2\sqrt{2\frac{p_T - p_a}{\rho} + 2g(H+l)}} ln(\frac{17}{3}) \qquad \left[\frac{m}{\sqrt{\frac{kgm^4}{m^2 s^2 kg} + \frac{m^2}{s^2}}}\right] = [s]$$

3. Aufgabe

a) $p_{tot,0} = \frac{\rho}{2} v_0^2 + p_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_0)}$

Bernoulli mit Verlust von $\boxed{0}$ nach $\boxed{1}$:

$$p_{tot,0} = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \zeta_1 \frac{\rho}{2} v_0^2 - \frac{\rho}{2} \omega_0^2 r_1^2 \quad \text{mit} \quad p_1 = p_a$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_a - \zeta_1 (p_{tot,0} - p_0) + \frac{\rho}{2} \omega_0^2 r_1^2)}$$

Bernoulli mit Verlust von $\boxed{0}$ nach $\boxed{2}$:

$$p_{tot,0} = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \zeta_2 \frac{\rho}{2} v_0^2 - \frac{\rho}{2} \omega_0^2 r_2^2 \quad \text{mit} \quad p_2 = p_a$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_a - \zeta_2 (p_{tot,0} - p_0) + \frac{\rho}{2} \omega_0^2 r_2^2)}$$

Konti: $19(v_1 A_1 + v_2 A_2) = v_0 A_0$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad , \quad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$A_0 = \frac{19(v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + v_2 \frac{\pi d_2^2}{4})}{\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_0)}}$$

b) $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad$ stationäre Strömung für statisches Koordinatensystem

$$\vec{M} = \int_{KF_i} (\vec{r_i} \times \vec{v_i}) \rho \vec{v_i} \cdot \vec{n_i} dA_i \quad ; \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{abs} = v_{rel}$$

$$(\vec{r_i} \times \vec{v_i}) = r_i v_i \cos \alpha_i$$

$$\rho \vec{v_i} \cdot \vec{n_i} dA_i = \dot{m}_i = \rho v_i A_i$$

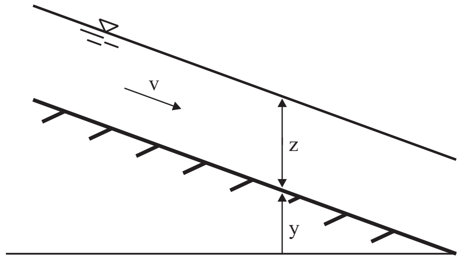
v_1 und v_2 ergeben sich analog zu Aufgabenteil a) zu:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_a - \zeta_1 (p_{tot,0} - p_0)}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{tot,0} - p_a - \zeta_2 (p_{tot,0} - p_0)}$$

$$M = 19\, r_1 v_1 \cos \alpha_1 \cdot \rho v_1 A_1 + 19\, r_2 v_2 \cos \alpha_2 \cdot \rho v_2 A_2$$

4. Aufgabe



a) Bernoulli: $\rho g z + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g y = konst$

$$\Rightarrow \quad z + \frac{v^2}{2g} + y = konst$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g}$$

mit $\quad v = \frac{\dot{V}}{Bz} \quad \Rightarrow \quad H = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$

$$H_{min}: \quad \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

$$H_{min} = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z_{gr}^2} = \frac{3}{2}z_{gr} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

b) $\Delta P = \dot{V} \cdot \Delta p \quad$ und $\quad \dot{V} = konst$

$$\Delta p = (p + \frac{\rho}{2}v^2)_{nachher} - (p + \frac{\rho}{2}v^2)_{vorher} = (p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2) - (p_1^* + \frac{\rho}{2}v_1^{*2})$$

$p_1 = p_a + \rho g z_1 \quad$ und $\quad p_1^* = p_a + \rho g z_1^*$

$$\Delta p = \rho g(z_1 - z_1^*) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_1^{*2})$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_0 = \rho g(H_1 - H_1^*) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V}\rho g(H_1 - H_1^*)$$

$$H_1^* = z_1^* + \frac{\dot{V}^2}{2gz_1^{*2}B^2} \quad \wedge \quad H_1 = H_{min} + y_W$$

(für $y_W > y_{gr} : H_1 > H_1^*$)

$H_{min} = \frac{3}{2}z_{gr} \quad$ mit $\quad z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

$$\Delta P = \dot{V}\rho g(H_{min} + y_W - H_1^*) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V}\rho g\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}} + y_W - \left(z_1^* + \frac{\dot{V}^2}{2g(z_1^*)^2B^2}\right)\right)$$

5. Aufgabe

a) Kräftegleichgewichte:

Schnitt 1:

$$\begin{aligned}\Sigma F = 0 &= -\sin(\alpha)\rho g dx dy + \tau dx - (\tau + \frac{d\tau}{dy}dy)dx \\ \Rightarrow \frac{d\tau_1}{dy} &= -\sin(\alpha)\rho g\end{aligned}$$

Schnitt 2:

$$\begin{aligned}\Sigma F = 0 &= \sin(\beta)\rho g dx dy + \tau dx - (\tau + \frac{d\tau}{dy}dy)dx \\ \Rightarrow \frac{d\tau_2}{dy} &= \sin(\beta)\rho g\end{aligned}$$

b) Geschwindigkeitsprofile:

Randbedingungen:

$$\tau(y_{1,2} = \delta_{1,2}) = 0$$
$$u(y_{1,2} = 0) = U_{Band}$$

Schnitt 1:

$$\tau = -\sin(\alpha)\rho g y_1 + C_{1,1} \text{ mit } \tau = -\eta\frac{du}{dy_1}$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dy_1} = \frac{1}{\eta}(\sin(\alpha)\rho g y_1 - C_{1,1})$$
$$u = \frac{1}{\eta}(\sin(\alpha)\rho g\frac{y_1^2}{2} - C_{1,1}y_1) + C_{2,1}$$

Schnitt 2:

$$\tau = \sin(\beta)\rho g y_2 + C_{1,2} \text{ mit } \tau = -\eta\frac{du}{dy_2}$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dy_2} = \frac{1}{\eta}(-\sin(\beta)\rho g y_2 - C_{1,2})$$
$$u = \frac{1}{\eta}(-\sin(\beta)\rho g\frac{y_2^2}{2} - C_{1,2}y_1) + C_{2,2}$$

RB für τ:

$$\begin{aligned}
\text{Schnitt 1:} \quad 0 &= -\sin(\alpha)\rho g\delta_1 + C_{1,1} \\
\Rightarrow C_{1,1} &= \sin(\alpha)\rho g\delta_1 \\
\text{Schnitt 2:} \quad 0 &= \sin(\beta)\rho g\delta_2 + C_{1,2} \\
\Rightarrow C_{1,2} &= -\sin(\beta)\rho g\delta_2
\end{aligned}$$

RB für u, Schnitte 1 und 2:

$$U_{Band} = u(0) = C_2$$

Geschwindigkeitsprofile:

$$u_1 = \sin(\alpha)\frac{\rho g}{\eta}(\frac{y_1^2}{2} - \delta_1 y_1) + U_{Band}$$
$$u_2 = \sin(\beta)\frac{\rho g}{\eta}(-\frac{y_2^2}{2} + \delta_2 y_2) + U_{Band}$$

c) Massenerhaltung:

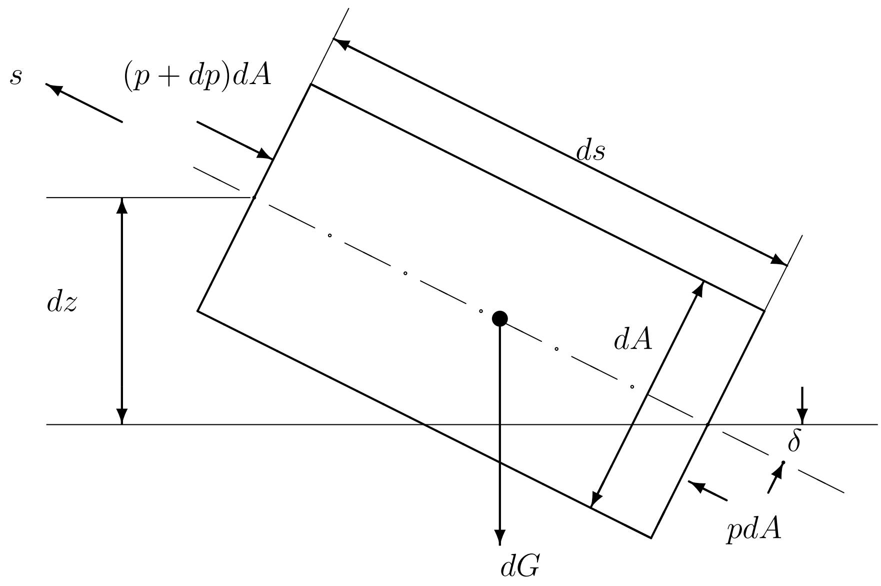
$$\begin{aligned}
\rho\int_0^{\delta_1} u_1 dy &= \rho\int_0^{\delta_2} u_2 dy \\
\Rightarrow \sin(\alpha)\frac{\rho g}{\eta}(\frac{y^3}{6} - \delta_1\frac{y^2}{2}) + U_{Band}y|_0^{\delta_1} &= \sin(\beta)\frac{\rho g}{\eta}(-\frac{y^3}{6} + \delta_2\frac{y^2}{2}) + U_{Band}y|_0^{\delta_2} \\
\Rightarrow \sin(\alpha)\frac{\rho g}{\eta}(\frac{\delta_1^3}{6} - \frac{\delta_1^3}{2}) + U_{Band}\delta_1 &= \sin(\beta)\frac{\rho g}{\eta}(-\frac{\delta_2^3}{6} + \frac{\delta_2^3}{2}) + U_{Band}\delta_2 \\
\Rightarrow -\frac{\rho g}{\eta}(\sin(\beta)\frac{\delta_2^3}{3} + \sin(\alpha)\frac{\delta_1^3}{3}) &= U_{Band}(\delta_2 - \delta_1) \\
\Rightarrow -\frac{\rho g}{3\eta}\delta_1^3(\sin(\beta)n^3 + \sin(\alpha)) &= U_{Band}\delta_1(n-1)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\Rightarrow \delta_1 = \sqrt{\frac{3\eta}{\rho g}\cdot\frac{1-n}{\sin(\beta)n^3 + \sin(\alpha)}U_{Band}} \qquad \text{, da } \delta_1 \leq 0 \text{ physikalisch nicht möglich}$$

6. Aufgabe

a) Das zweite Newtonsche Gesetz für das folgende Flüssigkeitselement lautet:



$$\sum d\vec{F} \;=\; dm\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Unter Vernachlässigung der Reibungskräfte entspricht die Summe der äußeren Kräfte in Richtung s des Stromfadenelements

$$\sum d\vec{F} \;=\; -\,dG\,\sin\delta \,+\, p\,dA \,-\, (p\,+\,dp)\,dA \qquad .$$

Berücksichtigt man

$$dG = g\;dm = \rho\;g\;ds\;dA$$

und

$$\sin\delta \;=\; \frac{dz}{ds} \qquad ,$$

ergibt sich:

$$\rho\,\frac{dv}{dt} \;=\; -\,\rho\,g\,\frac{dz}{ds} \,-\, \frac{dp}{ds} \qquad .$$

Die substantielle Ableitung für das Stromfadenelement lautet:

$$\frac{dv}{dt} \;=\; \frac{\partial v}{\partial t} \,+\, v\,\frac{\partial v}{\partial s} \;=\; \frac{\partial v}{\partial t} \,+\, \frac{\partial(\frac{v^2}{2})}{\partial s}$$

Nach Einsetzen lautet die Differentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} + \frac{dp}{ds} + \rho\, g \frac{dz}{ds} = 0 \qquad .$$

Unter Annahme einer stationären, reibungsfreien und inkompressiblen Strömung ergibt sich nach Integration die Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho\, g\, z = konst \qquad .$$

b) Mit der Definition der Stromlinie ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \leftrightarrow \quad ydy = \frac{V_0 cos(\omega t) t^2}{t_0} dx$$

Die Integration liefert:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{V_0 cos(\omega t) t^2}{t_0} x + C_1$$

C_1 kann über die gegebene Randbedingung bestimmt werden:

$$C_1 = \frac{V_0}{t_0} x_1 \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$$

Somit ergibt sich für die Stromlinie des Zeitpunkts t_1:

$$y^2 = 2\frac{V_0 \pi^2}{\omega^2 t_0}(x_1 - x)$$

c) Die Definition des Bahnlinienvektors in y-Richtung lautet:

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, t) = V_0\, cos(\omega t)$$

Die Integration liefert:

$$y(t) = \frac{V_0 sin(\omega t)}{\omega} + C_2$$

Mit der Randbedingung für t_2 folgt $C_2 = 0$. Somit ist

$$y(t) = \frac{V_0 sin(\omega t)}{\omega}$$