....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor)

09. 04. 2021

1. Aufgabe

a) Ideales Gasgesetz:

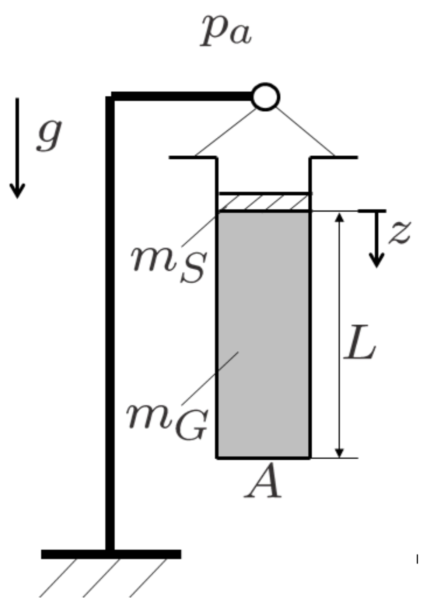
$$p(z) = \rho(z)RT_a$$

Hydrostatische Grundgleichung:

$$\frac{dp(z)}{dz} = \rho(z)g \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{g}{RT_a} \Leftrightarrow p(z) = p_0 e^{\frac{gz}{RT_a}}$$

mit

$$p_0 = p_a + \frac{m_s g}{A}$$



Massenerhaltung für den Behälter lautet:

$$m_G = \int_0^L \rho(z) g A dz$$

Barometrische Höhenformel lautet:

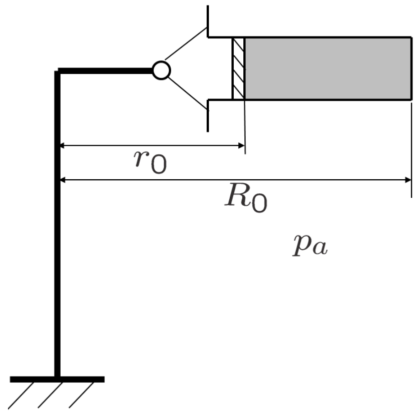
$$\rho(z) = \rho_0 e^{\frac{gz}{RT_a}} = \frac{p_a + \frac{m_s g}{A}}{RT_a} e^{\frac{gz}{RT_a}}$$

Alles in die Massenerhaltung einsetzen und integrieren:

$$m_G = \rho_0 \frac{A}{g}\left(e^{\frac{gL}{RT_a}} - 1\right) \Rightarrow L = \frac{RT_a}{g} ln\left(\frac{\frac{m_G g}{A}}{pa + \frac{m_S g}{A}} + 1\right)$$

b) Es gilt:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{RT_a dp}{p} = \omega^2 r dr$$



Integration liefert:

$$\int_{p_0}^{p_{max}} \frac{dp}{p} = \int_{r_0}^{R_0} \frac{\omega^2}{RT_a} r dr \Leftrightarrow ln \frac{p_{max}}{p_0} = \frac{\omega^2}{2RT_a}(R_0^2 - r_0^2)$$

mit

$$p_0 = p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A}$$

Einsetzen und auflösen:

$$p_{max} = \left(p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A} \right) e^{\frac{\omega^2}{2RT_a}(R_0^2 - r_0^2)}$$

c) Es gilt:

$$dp = \rho^* \omega^2 r dr$$

Integration analog zu b) mit konstanter Dichte ρ^*:

$$p_{max} = p_a + \frac{m_S \omega^2 r_0}{A} + \frac{\rho^*}{2} \omega^2 (R_0^2 - r_0^2)$$

2. Aufgabe

a) Verlustbehafteter Bernoulli von Oberfläche zu Punkt E:

$$p_a + \varrho g(h + \frac{H}{2}) \geq p_a + \frac{1}{2}\varrho v_{E1}^2(1 + \zeta_{Ges})$$

Damit das Wasser nicht weiter steigt, gilt: $v_E = \frac{4\dot{m}}{\varrho \pi d^2}$
Umstellen nach ζ_{Ges} liefert:

$$\zeta_{Ges} \leq \frac{2g(h + \frac{H}{2})}{v_E^2} - 1$$

$$\Rightarrow \zeta_{Ges} \leq \frac{2g(h + \frac{H}{2})}{\left(\frac{4\dot{m}}{\varrho \pi d^2}\right)^2} - 1$$

b) Erneut verlustbehafteter Bernoulli von Oberfläche zu Punkt E:

$$p_a + \varrho g(h + H) = p_a + \frac{1}{2}\varrho (v_E^*)^2(1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V)$$

mit $v_E^* = \frac{4\dot{m}_{neu}}{\varrho \pi d^2}$ folgt:

$$2g(h + H) = \left(\frac{4\dot{m}_{neu}}{\varrho \pi d^2}\right)^2 \cdot (1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V)$$

$$\dot{m}_{neu} = \sqrt{\frac{2g(h + H)}{1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V}} \cdot \frac{\varrho \pi d^2}{4} = \sqrt{\frac{2g(h + H)}{\zeta_V + \frac{2g(h + \frac{H}{2})}{v_E^2}}} \cdot \frac{\varrho \pi d^2}{4}$$

$$\dot{m}_{neu} = \sqrt{\frac{h + H}{(h + \frac{H}{2}) + \zeta_V \frac{v_{E1}^2}{2g}}} \cdot \frac{\varrho \pi d^2}{4} \cdot v_E$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{neu} = \sqrt{\frac{h + H}{(h + \frac{H}{2}) + \frac{\zeta_V}{2g} \cdot \left(\frac{4\dot{m}}{\varrho \pi d^2}\right)^2}} \cdot \dot{m}$$

c) Quasistationär: $\int \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$
verlustbehafteter Bernoulli von sich bewegender Oberfläche zu Punkt E:

$$\frac{1}{2}\varrho \left(-\frac{dz}{dt}\right)^2 + \varrho g(h + z) = \frac{1}{2}\varrho v_E^2(t) \cdot (1 + \zeta_{Ges})$$

mit Konti: $v_E(t) \cdot \pi \frac{d^2}{4} = -\frac{dz}{dt} \cdot A \Rightarrow \; v_E(t) = -\frac{dz}{dt} \cdot \frac{4A}{\pi d^2}$

$$\left(-\frac{dz}{dt}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{4A}{\pi d^2}\right)^2 \cdot (1+\zeta_{Ges}) - 1\right] = 2g(h+z)$$

Trennung der Variablen:

$$\sqrt{\frac{(\frac{4A}{\pi d^2})^2 \cdot (1+\zeta_{Ges}) - 1}{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{h+z}} = -dt$$

$$T = -\int_H^0 \sqrt{\frac{(\frac{4A}{\pi d^2})^2 \cdot (1+\zeta_{Ges}) - 1}{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{h+z}}$$

$$T = -\sqrt{\frac{(\frac{4A}{\pi d^2})^2 \cdot (1+\zeta_{Ges}) - 1}{2g}} \cdot 2\left[\sqrt{h+z}\right]_H^0$$

$$\Rightarrow T = -2\sqrt{\frac{(\frac{4A}{\pi d^2})^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{2g(h+\frac{H}{2})}{\left(\frac{4\dot{m}}{\varrho \pi d^2}\right)^2} - 1\right)\right) - 1}{2g}} \cdot (\sqrt{h} - \sqrt{h+H})$$

3. Aufgabe

a) Für das gesuchte, lineare Geschwindigkeitsprofil gilt:

$$v_2(y) = a \cdot |y| + b$$

Mit den beiden Randbedingungen:

$$v_2(y = \frac{B}{2}) = v_{2,max} = a \cdot \frac{B}{2} + b$$
$$v_2(y = B) = 0 = a \cdot B + b$$
$$\Rightarrow b = -a \cdot B$$

Einsetzen in die erste Randbedingung ergibt:

$$v_{2,max} = a \cdot \frac{B}{2} - a \cdot B$$
$$a = -\frac{2 \cdot v_{2,max}}{B}$$

b berechnet sich dann zu:

$$b = 2v_{2,max}$$

Alles einsetzen liefert die vollständige Form des Geschwindigkeitsprofils:

$$v_2(y) = -\frac{2 \cdot v_{2,max}}{B} \cdot |y| + 2v_{2,max} = -2 \cdot v_{2,max} \left(\frac{|y|}{B} - 1 \right)$$

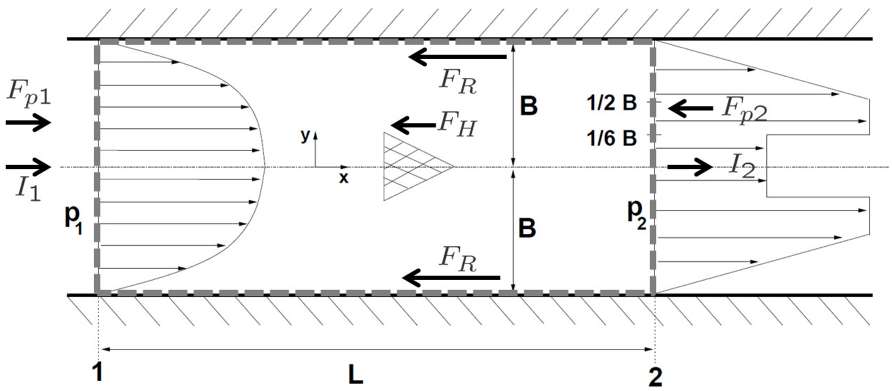
Laut Aufgabenstellung ist der Geschwindigkeitsgradient an der Wand über die gesamte Messstrecke konstant. Dieser ergibt sich an der Stelle 1 zu:

$$v_1(y) = \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot v_{1,max}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial v_1(y)}{\partial y}|_{y=B} = -\frac{2}{B} \cdot v_{1,max} = a$$
$$\Rightarrow v_{2,max} = v_{1,max}$$
$$\Rightarrow v_2(y) = -2 \cdot v_{1,max} \left(\frac{|y|}{B} - 1 \right)$$

Gemäß der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen ist der Volumenstrom innerhalb des Kanals konstant und kann für Stelle 1 und 2 berechnet werden. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \int_{-B}^{B} v_1(y) \cdot dy \\
&= T \cdot \int_{-B}^{B} v_1(y) dy \\
&= T \cdot \int_{-B}^{B} \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot v_{1,max} dy \\
&= T \cdot v_{1,max} \cdot \int_{-B}^{B} \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) dy \\
&= T \cdot v_{1,max} \cdot \left[y - \frac{y^3}{3B^2}\right]_{-B}^{B} \\
&= T \cdot v_{1,max} \cdot \left(2B - \frac{2B}{3}\right) \\
&= T \cdot v_{1,max} \frac{3}{4} B
\end{aligned}
$$

b) Um den Widerstand des Körpers zu berechnen, betrachtet man nur die Impulsbilanz in x-Richtung:



$$-I_1 + I_2 = F_{P1} - F_{P2} - F_R - F_H$$

Für den Impuls an Stelle 1 gilt:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-B}^{B} \rho v_1 \vec{(y)} (v_1 \vec{(y)} \cdot \vec{n}) dA \\
&= \rho T \int_{-B}^{B} (v_1(y))^2 dy \\
&= \rho T \int_{-B}^{B} \left(\left(1 - \frac{y^2}{B^2} \right) \right)^2 dy \\
&= \rho T \int_{-B}^{B} \left(\left(1 - \frac{y^2}{B^2} \right) v_{1,max} \right)^2 dy \\
&= \rho T v_{1,max}^2 \int_{-B}^{B} \left(1 - 2\frac{y^2}{B^2} + \frac{y^4}{B^4} \right) dy \\
&= \rho T v_{1,max}^2 \left[y - \frac{2}{3}\frac{y^2}{B^2} + \frac{1}{5}\frac{y^4}{B^4} \right]_{-B}^{B} dy \\
&= 2\rho T v_{1,max}^2 \left(B - \frac{2}{3}B + \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{16}{15} \rho T B v_{1,max}^2
\end{aligned}$$

Der Impuls an Stelle 2 ergibt sich zu:

$$I_2 = I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}$$

$I_{2,1}$ lautet:

$$\begin{aligned}
I_{2,1} &= 2\rho T \int_{0}^{\frac{B}{6}} (v_2(y))^2 dy \\
&= 2\rho T \left(\frac{v_{1,max}}{2} \right)^2 \frac{B}{6} \\
&= \frac{1}{12} \rho T B v_{1,max}^2
\end{aligned}$$

Analog $I_{2,2}$ und $I_{2,3}$:

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &= 2\rho T \int_{\frac{B}{6}}^{\frac{B}{2}} (v_2(y))^2 dy \\
&= 2\rho T \left(v_{1,max} \right)^2 \left(\frac{B}{2} - \frac{B}{6} \right) \\
&= \frac{2}{3} \rho T B v_{1,max}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{2,3} &= 2\rho T \int_{\frac{B}{2}}^{B} (v_2(y))^2 dy \\
&= 2\rho T \int_{\frac{B}{2}}^{B} (ay+b)^2 dy \\
&= 2\rho T \left(\frac{a^2}{24} B^2 + \frac{ab}{4} B^2 + \frac{b^2}{2} B \right) \\
&= \frac{1}{3} \rho T B v_{1,max}^2
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich I_2 zu:

$$
I_2 = \frac{13}{12} \rho T B v_{1,max}^2
$$

Die Druckkräfte lauten:

$$
\begin{aligned}
F_{P1} &= 2 p_1 T B \\
F_{P2} &= 2 p_2 T B
\end{aligned}
$$

Die Reibungskraft wird wie folgt bestimmt:

$$
\begin{aligned}
F_R = 2\tau_W A &= 2\eta \frac{\partial v_1(y)}{\partial y} |_{y=B} T \\
&= 2\eta \frac{2}{B} v_{1,max} T = 4 \frac{\eta}{B} T v_{1,max}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Haltekraft:

$$
F_H = -2TB(p_1 - p_2) + \frac{1}{60} \rho T B v_{1,max}^2 + \frac{4}{B} \eta T L v_{1,max}
$$

4. Aufgabe

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible, stationäre ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) Strömungen lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Die Strömung ist eben, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0, \qquad v = 0$$

Damit folgt aus Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Die Strömung ist ausgebildet, d.h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in z-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Somit folgt:

$$\frac{du}{dx} = 0$$

Daraus folgt $u = C$ mit der Integrationskonstante C. An den Wänden gilt wegen der Haftbedingung $u(z = 0) = u(z = h) = 0$. Die Lösung der obigen Gleichung in die Randbedingungen eingesetzt führt zu $u(z) = 0$.

Die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen lauten:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Mit den Vereinfachungen von oben folgt:

$$0 = f_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$0 = f_y$$
$$0 = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Die Gravitation ist nicht vernachlässigbar und wirkt in negative z-Richtung, sodass gilt $f_x = f_y = 0$ und $f_z = -\rho \cdot g$. Aufgrund der ausgebildeten Strömung ist w keine Funktion von z und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y. Damit gilt $w = w(x)$ und $\partial w/\partial x = dw/dx$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= 0 \\ 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} &+ \eta \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass p keine Funktion von x ist und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y ist. Damit gilt $p = p(z)$ und $\partial p/\partial z = dp/dz$. Es ergibt sich:

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = \eta \frac{d^2 w}{dx^2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

b) Die erste Integration dieser Gleichung liefert:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) x + C_1$$

Nach der zweiten Integration erhält man:

$$w(x) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Die Haftbedingung an der Platte lautet $w(x = 0) = W_P$ und an der rechten Wand $w(x = h) = 0$. Setzt man das in die Gleichung ein, erhält man:

$$W_P = C_2$$

bzw.

$$w(x = h) = 0 = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{h^2}{2} + C_1 h + W_P$$

C_1 lautet damit:

$$C_1 = -\frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{h}{2} - \frac{W_P}{h}$$

Für die Geschwindigkeit im rechten Spalt ergibt sich dann:

$$w(x) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{h \cdot x}{2} - \frac{W_P \cdot x}{h} + W_P$$

bzw.

$$w(x) = \frac{h^2}{2\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right) + W_P\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

c) Für die linke Spaltströmung gilt in entsprechender Form:

$$w(x') = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right)\frac{x'^2}{2} + C_1 x' + C_2$$

Die Haftbedingung ergibt an der Platte $w(x' = 0) = W_P$ und an der linken Wand $w(x' = 2h) = 0$. Analog ergibt sich somit:

$$w(x') = \frac{(2h)^2}{2\eta}\left(\frac{dp}{dz'} + \rho g\right)\frac{x'}{2h}\left(\frac{x'}{2h} - 1\right) + W_P\left(1 - \frac{x'}{2h}\right)$$

d) An der Platte muss ein Kräftegleichgewicht zwischen Reibung und Gewichtskraft herrschen. Die Reibungskräfte werden über die Schubspannung berechnet. Die Kraft auf die Platte berechnet sich also zu:

$$F_{R,rechts} + F_{R,links} = G$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten an der rechten Seite erhält man also:

$$\frac{dw}{dx}(x = 0) = -\frac{h}{\eta}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right)\frac{1}{2} - \frac{W_P}{h}$$

Somit berechnet sich die Reibungskraft auf der rechten Seite zu:

$$F_{R,rechts} = \tau(x = 0) \cdot L \cdot T = \eta\frac{dw}{dx}(x = 0) \cdot L \cdot T$$

bzw.

$$F_{R,rechts} = \left(-\frac{h}{2}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{h}\right) \cdot L \cdot T$$

Analog berechnet sich die Reibungskraft der linken Seite zu:

$$F_{R,links} = \tau(x' = 0) \cdot L \cdot b = \eta\frac{dw'}{dx'}(x = 0) \cdot L \cdot T$$

bzw.

$$F_{R,links} = \left(-h\left(\frac{dp}{dz'} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{2h}\right) \cdot L \cdot T$$

Eingesetzt in das Kräftegleichgewicht erhält man:

$$\left(-\frac{h}{2}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{h}\right) \cdot L \cdot T + \left(-h\left(\frac{dp}{dz'} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{2h}\right) \cdot L \cdot T = G$$

bzw. mit $dp/dz = dp/dz'$:

$$\left(-\frac{h}{2}\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{h}\right) \cdot L \cdot T + \left(-h\left(\frac{dp}{dz} + \rho g\right) - \eta\frac{W_P}{2h}\right) \cdot L \cdot T = G$$

Umgeformt ergibt sich:

$$G = \left(-\frac{3h}{2} \left(\frac{dp}{dz} + \rho g \right) - \eta \frac{3W_P}{2h} \right) \cdot L \cdot T$$

Aufgelöst nach dem Druckgradienten ergibt sich:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{2}{3} \frac{G}{hLT} - \eta \frac{W_P}{h^2} - \rho g$$

Zusätzlich gilt:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Damit ergibt sich für die Druckdifferenz:

$$\Delta p = \left(\frac{2}{3} \frac{G}{hLT} + \eta \frac{W_P}{h^2} + \rho g \right) L$$

5. Aufgabe

a) Der Ski bewegt sich mit der Geschwindigkeit U_∞. Damit ist die Geschwindigkeit ebenfalls U_∞. Desweiteren ist die Höhe h gegeben, so dass für die Koordinatentransformation $y_2 = y_1 + h$ gilt. Für $\overline{u}(y_2)$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}\overline{u}(y_2) &= -U_\infty + U_\infty \cdot \left(\frac{y_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \\ &= -U_\infty + U_\infty \cdot \left(\frac{y_2 - h}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \\ &= U_\infty \cdot \left(\left(\frac{y_2 - h}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - 1\right)\end{aligned}$$

b) Der Reynolds-Ansatz wird zur Beschreibung der turbulenten Strömungsgrößen verwendet. Dabei setzt sich eine Strömungsgröße aus der zeitlich gemittelten Größe plus eine Schwankungsgröße zusammen.
Der Reynolds-Ansatz für die Strömung lautet also:

$$\begin{aligned}u &= \overline{u} + u' \\ v &= \overline{v} + v' \\ p &= \overline{p} + p'\end{aligned}$$

c) Für τ_t gilt:

$$\tau_t(y_2) = -\rho\overline{u'v'} = \eta_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

Die turbulent Viskosität ergibt sich nach Prandtl zu:

$$\begin{aligned}\eta_t &= \rho l^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right| \\ \Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho l^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right| \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right) \\ \Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2\end{aligned}$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten an der Stelle A ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial y_2}\right) &= \frac{U_\infty}{7\delta^{\frac{1}{7}}} \cdot y_2^{\frac{-6}{7}} \\ \left(\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial y_2}\right)^2 &= \frac{U_\infty^2}{49\delta^{\frac{2}{7}}} \cdot y_2^{\frac{-12}{7}}\end{aligned}$$

Setzt man nun noch die gegebene Formel für den Prandtl'schen Mischungsweg ein, erhält man:

$$\tau_t(y_2) = \rho C^2 y_2^2 \frac{U_\infty^2}{49\delta^{\frac{2}{7}}} \cdot y_2^{\frac{-12}{7}}$$
$$\Rightarrow \tau_t(y_2) = \rho C^2 \frac{U_\infty^2}{49\delta^{\frac{2}{7}}} \cdot y_2^{\frac{2}{7}}$$

d) Das logarithmische Wandgesetz lautet:

$$u^+ = \frac{1}{k} ln(y^+) + 5.5$$
$$\text{mit} \qquad y^+ = \frac{y_2 u_\tau}{\nu}$$
$$\Rightarrow u^+ = \frac{1}{k} ln(\frac{y_2 u_\tau}{\nu}) + 5.5$$

Nach Aufgabenstellung berechnet sich die Wandschubspannung zu:

$$\begin{aligned}\tau_W = \tau_t(y_2 = \Delta) &= \rho C^2 \frac{U_\infty^2}{49\delta^{\frac{2}{7}}} \cdot \Delta^{\frac{2}{7}} \\ &= \rho C^2 \frac{U_\infty^2}{49\delta^{\frac{2}{7}}} \cdot \left(\frac{1}{100}\delta\right)^{\frac{2}{7}} \\ &= \rho C^2 \frac{U_\infty^2}{49} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{7}}\end{aligned}$$

u_τ ist definiert als:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} = \sqrt{C^2 \frac{U_\infty^2}{49} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{7}}}$$

Somit ergibt sich für u^+:

$$u^+ = \frac{1}{k} ln\left(\frac{y_2 \cdot \sqrt{C^2 \frac{U_\infty^2}{49} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{7}}}}{\nu}\right) + 5.5$$