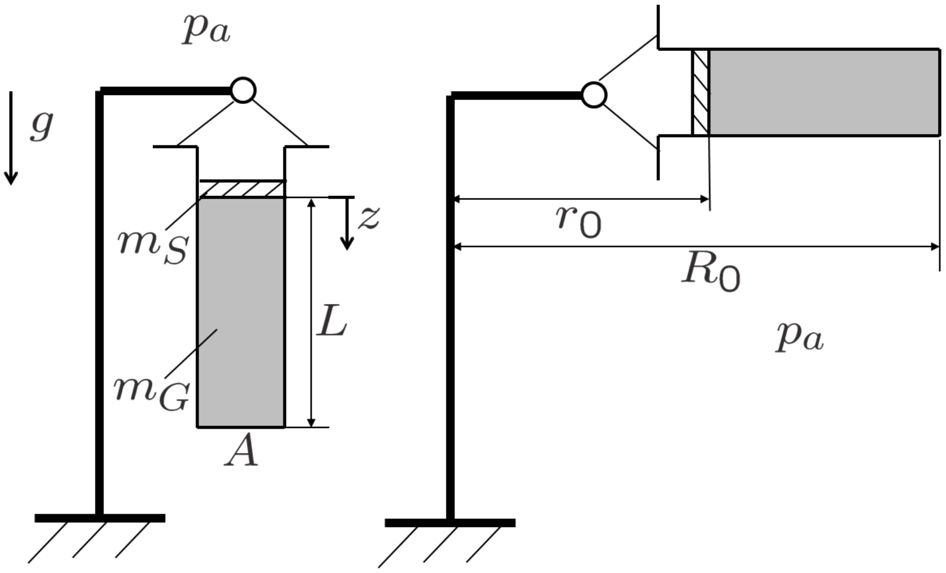
....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

09. 04. 2021

1. Aufgabe (9 Punkte)

Der zylindrische Behälter einer Zentrifuge ist mit einem idealen Gas der Masse m_G gefüllt und durch eine reibungsfrei gleitende, dünne Scheibe der Masse m_S verschlossen. Der Behälter ist drehbar gelagert und richtet sich bei Betrieb der Zentrifuge mit der Winkelgeschwindigkeit ω horizontal aus. Außerhalb des Behälters herrscht der Umgebungsdruck p_a.



a) Bestimmen Sie die Länge L der Gassäule vor Betrieb der Zentrifuge.

In den nachfolgenden Aufgabenteilen b) und c) kann der Einfluss der Erdschwere vernachlässigt werden.

b) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge.

c) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge für ein inkompressibles Fluid der Dichte ρ^*.

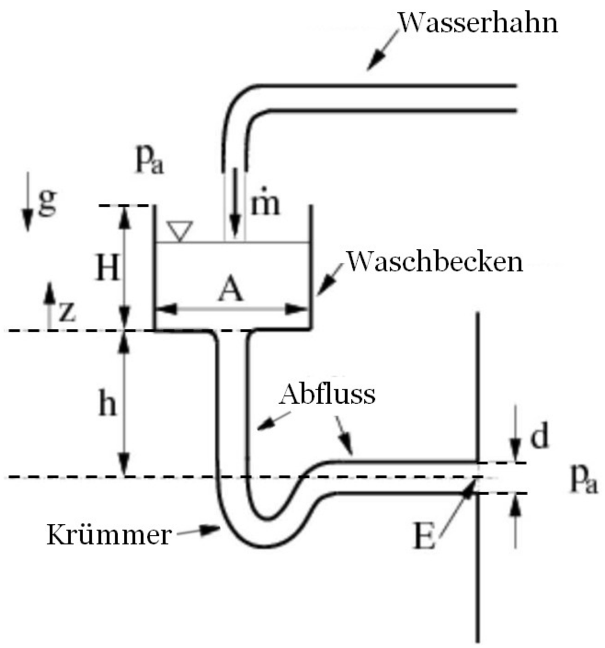
Gegeben:

$m_G, \quad m_S, \quad p_a, \quad R, \quad T_a, \quad \omega, \quad A, \quad r_0, \quad R_0, \quad \rho^*, \quad g$

Hinweise:

- Die Volumenkraft der Luft sei vernachlässigbar.
- Die Temperatur sei konstant.
- Es gilt allgemein: $dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho(z)g$
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

2. Aufgabe (10 Punkte)



Aus einem Wasserhahn fließt Wasser in ein Waschbecken und wird anschließend durch einen Krümmer und ein Abflussrohr in die Kanalisation (Stelle E) geleitet.

a) Wie groß darf der Gesamtwiderstand ζ_{Ges} von Krümmer und Abflussrohr maximal sein, sodass das Waschbecken höchstens zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist?

Durch Ablagerungen wird der Widerstand des Rohres nun zusätzlich noch um ζ_V erhöht.

b) Wie groß darf der Massenstrom $\dot{m}_{neu}$ jetzt noch sein, ohne dass das Waschbecken überläuft?

Ein Rohrreinigungsteam hat glücklicherweise das Abflussrohr wieder säubern können, sodass nur noch der ursprüngliche Widerstand ζ_{Ges} wirkt. Das Waschbecken wird nun mit einem Stopfen verschlossen und bis zum Rand (Höhe H) gefüllt. Anschließend wird der Wasserhahn abgestellt und der Stopfen wieder herausgezogen.

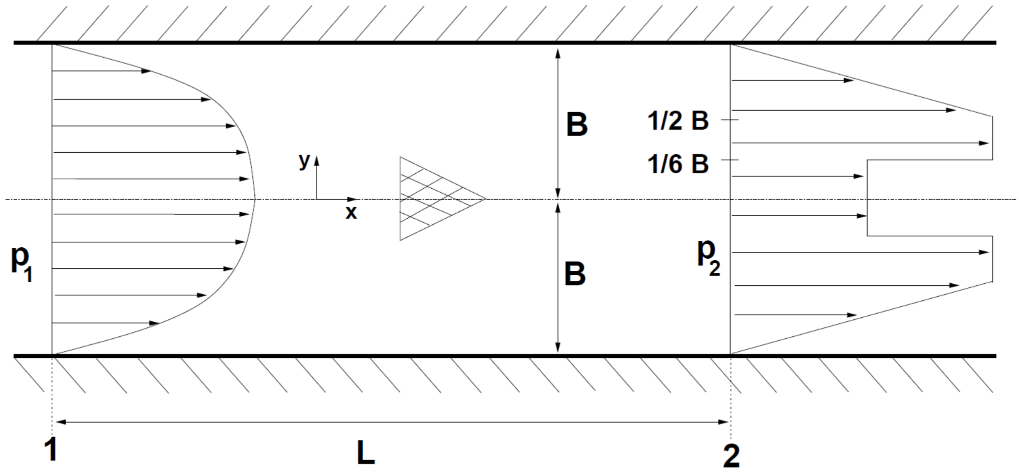
c) Wie lange dauert es, bis das Waschbecken unter der Annahme einer quasistationären Strömung leergelaufen ist?

Gegeben: $\dot{m}$, ρ, A, ζ_V, h, g, H, d, $A \gg d^2$

Hinweise:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

3. Aufgabe (15 Punkte)



In einem Rechteckkanal der Breite $2B$ und der Tiefe T (senkrecht zur Zeichenebene) ist ein kleiner, dreiecksförmiger Körper eingespannt. Die abgebildete Form ist konstant über die Tiefe T. Der Kanal wird von einem inkompressiblen, reibungsbehafteten Medium (Dichte ρ, Viskosität η) stationär durchströmt. Im Querschnitt 1 wird die Geschwindigkeitsverteilung

$$v_1(y) = \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot v_{1,max}$$

gemessen. In Querschnitt 2 wird das Geschwindigkeitsprofil ermittelt, welches durch die folgende Verteilung angenähert werden kann:

$$v_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} v_{2,max} & \text{für } 0 \leq |y| \leq \frac{B}{6} \\ v_{2,max} & \text{für } \frac{B}{6} \leq |y| \leq \frac{B}{2} \\ a \cdot |y| + b & \text{für } \frac{B}{2} \leq |y| \leq B \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b der Geschwindigkeitsverteilung $v_2(y)$ hinter dem Staukörper im Bereich $B/2 \leq |y| \leq B$. Bestimmen Sie darüber hinaus den Volumenstrom im Kanal.

b) Bestimmen Sie die Haltekraft des dreiecksförmigen Körpers im Kanal.

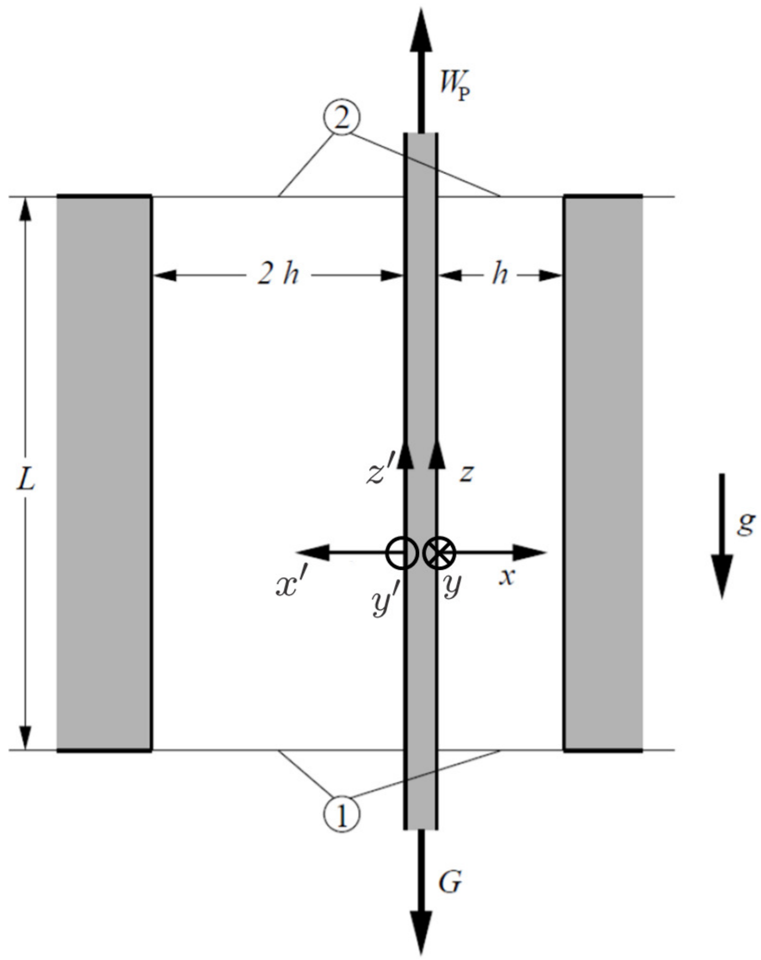
Gegeben: ρ, η, p_1, p_2, B, T, L, $v_{1,max}$

Hinweise:

- Die Drücke p_1 und p_2 sind über dem jeweiligen Querschnitt konstant.
- Die Reibung infolge der Schubspannungsverteilung auf der Wand kann **nicht** vernachlässigt werden.
- Der Geschwindigkeitsgradient an der Wand ist über die gesamte Messstrecke konstant.
- Wegen $T \gg B$ ist die Reibung an den Stirnseiten des Rechteckkanals vernachlässigbar.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

4. Aufgabe (15 Punkte)

Eine ebene Platte der Tiefe T (senkrecht zur Zeichenebene) wird so zwischen vertikalen Wänden geführt, dass sich auf der rechten Plattenseite ein Spalt mit der Weite h und auf der linken Plattenseite ein Spalt mit der Weite $2 \cdot h$ ergibt. Diese beiden Spalte werden von dem Öl so durchströmt, dass es im Querschnitt 1 mit dem Druck p_1 eintritt und im Querschnitt 2 mit dem Druck p_2 wieder austritt. Das Öl zieht dabei die Platte mit der Gewichtskraft G durch Reibung mit der Geschwindigkeit W_P nach oben. Die Strömung in den beiden Spalten sei über die ganze Länge L der Platte ausgebildet, eben, stationär und laminar. Die außerhalb des Spaltes vom Öl auf die Platte ausgeübten Reibungskräfte seien vernachlässigbar klein. Das Öl kann als Newtonsches Medium mit konstanter dynamischer Viskosität η und konstanter Dichte ρ behandelt werden.



a) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung und die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen. Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen!

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$ in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten im rechten Spalt. Verwenden Sie hierzu das in der Abbildung angegebene raumfeste x-z-Koordinatensystem.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $w(x')$ in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten im linken Spalt. Verwenden Sie hierzu das in der Abbildung angegebene raumfeste x'-z'Koordinatensystem.

d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit gegebener Größen die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$, wenn die Platte sich mit der vorgegebenen Geschwindigkeit W_P nach oben bewegen soll.

Gegeben:

$T, \quad h, \quad L, \quad \rho, \quad \eta, \quad G, \quad W_P, \quad g$

Hinweis:

- Wegen $h \ll L$ kann die dreidimensionale Strömung am Eintritt und am Austritt aus den Spalten vernachlässigt werden. Ebenso kann die Einlaufströmung in den Spalten vernachlässigt werden.
- Die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen lauten:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

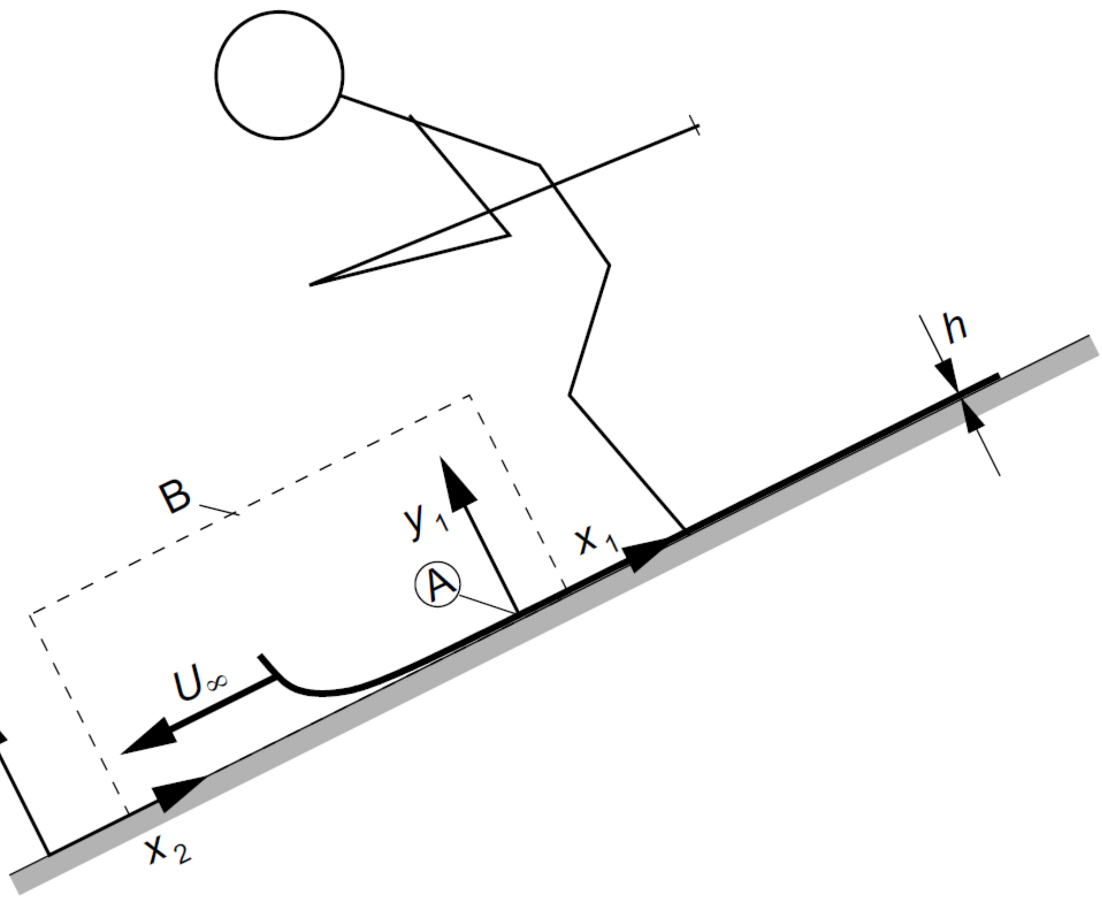
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

- Die ebene Strömung in dem Spalt bedeutet vernachlässigbar kleine Gradienten in y- bzw. y' -Richtung!
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

5. Aufgabe (11 Punkte)

Im Folgenden wird die Strömungsmechanik einer alpinen Skirennfahrerin näherungsweise betrachtet. Bei der Abfahrt auf dem Zielhang hat die Fahrerin eine Geschwindigkeit von U_∞. Für die Untersuchung wird ein mitbewegtes x_1-y_1-Koordinatensystem auf der Oberseite des Skis an der Stelle A und ein ortsfestes x_2-y_2-Koordinatensystem im Schnee definiert.



Die Geschwindigkeitsverteilung $\overline{u}(y_1)$ in Wandnähe außerhalb der viskosen Unterschicht bis zu der Dicke δ wird durch

$$\overline{u}(y_1) = U_\infty \cdot \left(\frac{y_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie $\overline{u}(y_2)$ für das ortsfeste x_2-y_2-Koordinatensystem im Schnee. Berücksichtigen Sie dabei die Höhe h des Skis.

b) Welcher Ansatz zur Beschreibung der Strömungsgrößen kann unter der Annahme einer turbulenten, inkompressiblen Strömung verwendet werden? Geben Sie den Ansatz für die Strömungsgrößen an.

Im Weiteren kann die Höhe des Skis vernachlässigt werden. Aus Messungen ist bekannt, dass sich der Mischungsweg entsprechend der Gleichung

$$l(y_2) = C \cdot y_2$$

näherungsweise ermitteln lässt.

c) Bestimmen Sie entsprechend dem Prandtlschen Mischungsweg den Verlauf der turbulenten Spannung in Wandnähe $\overline{\tau}(y_2)$ an der Stelle A.

Das logarithmische Wandgesetz im Bereich der Übergangsschicht lautet:

$$u^+(y_2) = \frac{1}{k} \cdot ln(y^+) + 5.5$$

Nach Prandtl ist die Schubspannung am Rand der viskosen Unterschicht gleich der Wandschubspannung, d.h. es gilt: $\overline{\tau}_t(y_2 = \Delta) = \overline{\tau}_W$. Die Dicke der viskosen Unterschicht Δ beträgt 1% der Dicke δ.

d) Bestimmen Sie $u^+(y_2)$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

<u>Gegeben:</u>

$U_\infty, \quad \rho, \quad \nu, \quad \delta, \quad C, \quad \Delta = \frac{1}{100}\delta, \quad k, \quad h$