....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor)

23. 08. 2021

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht im Schwebezustand des Ballons:

$$F_A = G + G_{HL}$$
$$\rho_L g V = \rho_{HL}\, gV + G$$

Für einen starren, offenen Ballon gilt: $p_L = p_{HL}$. Einsetzen des idealen Gasgesetzes $\rho = \frac{p}{RT}$ ergibt

$$G = \frac{p_L g V}{R}\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_{HL}}\right)$$

mit

$$T_L(z = z_1) = T_0 - K z_1$$

können wir nach der gesuchten Temperatur T_{HL} auflösen:

$$T_{HL} = \frac{1}{\frac{1}{T_0 - K z_1} - \frac{RG}{p_L(z_1) g V}}$$

$p_L(z_1)$ berechnen wir über die hydrostatische Grundgleichung:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\, dz}{R(T_0 - Kz)}$$

Die Integration dieser Formel liefert:

$$ln\, p\Big|_{p_0}^{p(z_1)} = \frac{g}{KR} ln\,(T_0 - Kz)\Big|_0^{z_1}$$
$$p(z_1) = p_0\left(1 - \frac{K\, z_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{RK}}$$

Setzen wir dies in unsere Formel ein, erhalten wir für $T_{HL}(z = z_1)$:

$$T_{HL}(z = z_1) = \frac{T_0\left(1 - \frac{K\, z_1}{T_0}\right)}{1 - \frac{RG}{gV}\frac{T_0}{p_0}\left(1 - \frac{K\, z_1}{T_0}\right)^{1 - \frac{g}{KR}}}$$

b) Kräftegleichgewicht für den neuen Schwebezustand bei $z = z_2$:

$$F_A = G_{HL,2} + G$$
$$\rho_L\, gV = \rho_{HL,2}\, gV + G$$

Für einen starren, offenen Ballon gilt $p_{HL} = p_2$.
p_2 berechnet sich durch die hydrostatische Grundgleichung zu:

$$p_2 = p_0 \, e^{-\frac{g \, z_2}{RT_0}}$$

Einsetzen in das Kräftegleichgewicht und Umstellen liefert:

$$gV \frac{p_0}{GRT_0} e^{-\frac{gz_2}{RT_0}} \left(1 - \frac{T_0}{T_{HL}}\right) = 1$$

Auflösen nach z_2 ergibt:

$$z_2 = \frac{RT_0}{g} ln \left(\frac{p_0 g V}{GRT_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_{HL}}\right)\right)$$

c) Für Stromlinien gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{U \cdot e^{-\frac{z}{H}}}{U \cdot \left(\frac{z}{H}\right)}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$y = \frac{e^{-\frac{z}{H}}}{\left(\frac{z}{H}\right)} x + C$$

Es ergibt sich für jede Höhe z also ein aus parallelen Geraden bestehendes Stromlinienfeld, wobei jede Stromlinie durch eine andere Integrationskonstante C charakterisiert wird.

d) Die Stromliniengleichung aus c) ist die allgemeine Geradengleichung der Form $y = mx + C$. Da der Wind außerhalb der unteren Atmosphäre in x-Richtung bläst, kann der Winkel zwischen der x-Achse und der Stromlinienrichtung in der Höhe z direkt durch die Steigung m berechnet werden. Somit ergibt sich für den Winkel α:

$$\alpha = arctan(m) = arctan \left(\frac{e^{-\frac{z}{H}}}{\left(\frac{z}{H}\right)}\right)$$

e) Da laut Aufgabenstellung der Ballon mit einer konstanten Aufstiegsgeschwindigkeit steigt, folgt für die Bahnlinie in z-Richtung:

$$z(t) = W \cdot t + z_0$$

wobei laut Aufgabenstellung $z_0 = 0$ ist.

Für die Bahnlinie in x-Richtung gilt:

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$

Die Integration dieses Ausdrucks liefert:

$$\int dx = U \int \left(\frac{Wt + z_0}{H} \right) dt$$

bzw.

$$x(t) = \frac{U}{H} \left(\frac{Wt^2}{2} + z_0 t \right) + C_1$$

Die Integrationskonstante C_1 bestimmen wir durch die Randbedingungen $t = t_0 = 0$ und $x(t = 0) = x_0$ zu:

$$x_0 = C_1$$

Somit ergibt sich für $x(t)$

$$x(t) = \frac{U}{H} \left(\frac{Wt^2}{2} \right) + x_0$$

$y(t)$ wird analog zu $x(t)$ berechnet. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} dy &= \int U \cdot e^{-\frac{Wt+z_0}{H}} dt \\ y(t) &= -\frac{UH}{W} \cdot e^{-\frac{Wt+z_0}{H}} + C_2 \end{aligned}$$

C_2 wird wieder über die Randbedingungen $t = t_0 = 0$ und $y(t = 0) = y_0$ bestimmt:

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{UH}{W} \cdot e^0 + C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= y_0 + \frac{UH}{W} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $y(t)$:

$$y(t) = -\frac{UH}{W} \cdot e^{-\frac{Wt}{H}} + y_0 + \frac{UH}{W}$$

2. Aufgabe

a) Für die Massenerhaltung von 1 nach 2 gilt:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho_S \dot{V}_2$$

$\dot{V}_1$ berechnet sich damit zu:

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_W} = \frac{\rho_S}{\rho_W}\dot{V}_2$$

Für die mittleren Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\overline{u_1} = \frac{\dot{V}_1}{A_1} = \frac{4\dot{V}_2}{\pi D_1^2}\frac{\rho_S}{\rho_W}$$

$$\overline{u_2} = \frac{\dot{V}_2}{A_2} = \frac{4\dot{V}_2}{\pi D_2^2}$$

Am Kanonenausgang besitzt das Geschwindigkeitsprofil eine parabolische Form und lässt sich mit der Gleichung $u_2(r) = ar^2 + b$ beschreiben. Aus den Randbedingungen

$$u_2(r=0) = u_{max} = b$$
$$u_2(r=R_2) = 0 = aR_2^2 + u_{max}$$

folgt für das Geschwindigkeitsprofil

$$u_2(r) = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R_2^2}\right)$$

Darüber hinaus gilt für den Massenstrom:

$$\begin{aligned}\dot{m}_2 &= \int \rho_S u_2(r) dA \\ &= 2\rho_S \int_0^{R_2} u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R_2^2}\right)\pi r dr \\ &= 2\rho_S u_{max}\pi \int_0^{R_2}\left(r - \frac{r^3}{R_2^2}\right) dr \\ &= 2\rho_S u_{max}\pi\left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^2}{4}\right) \\ &= \frac{\rho_S u_{max}\pi R_2^2}{2}\end{aligned}$$

Somit folgt für u_{max}

$$u_{max} = \frac{2\dot{m}_2}{\rho_S \pi R_2^2} = 2\overline{u_2} = \frac{8\dot{V}_2}{\pi D_2^2}$$

b) Der Impulsstrom an der Stelle 1 lautet:

$$\dot{I}_1 = \rho_W u_1^2 A_1 = \frac{4\dot{V}_2}{\pi D_1^2}\frac{\rho_S^2}{\rho_W}$$

Der Impulsstrom an der Stelle 2 berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2 &= \int \rho_S u_2(r)^2 dA \\
&= 2\rho_S \int_0^{R_2} u_{max}^2 (1 - \frac{r^2}{R_2^2})^2 \pi r dr \\
&= 2\rho_S u_{max}^2 \pi \int_0^{R_2} (r - \frac{2r^3}{R_2^2} + \frac{r^5}{R_2^4}) dr \\
&= 2\rho_S u_{max}^2 \pi \left[(\frac{r^2}{2} - \frac{2r^4}{4R_2^2} + \frac{r^6}{6R_2^4}) \right]_0^{R_2} \\
&= 2\rho_S u_{max}^2 \pi \left[(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_2^2}{6}) \right] \\
&= \frac{1}{3}\rho_S u_{max}^2 \pi R_2^2 \\
&= \frac{16}{3}\rho_S \frac{\dot{V}_2^2}{\pi D_2^2}
\end{aligned}$$

Für die Kräftebilanz in x-Richtung ergibt sich damit:

$$F_{S,x} = \dot{I}_2\, cos(\alpha) = \frac{16}{3}\rho_S \frac{\dot{V}_2^2}{\pi D_2^2} cos(\alpha)$$

Die Kräftebilanz in y-Richtung bestimmt sich zu:

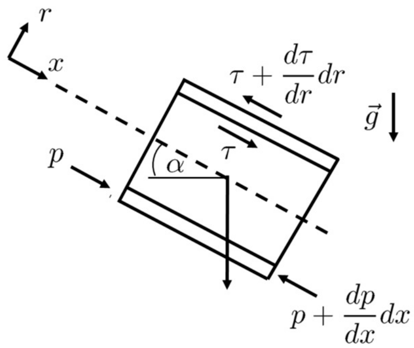
$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 sin(\alpha) = F_{S,y} - m_G g + (p_1 - p_a)\frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow F_{S,y} = m_G g - (p_1 - p_a)\frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{4\dot{V}_2}{\pi D_1^2}\frac{\rho_S^2}{\rho_W} + \frac{16}{3}\rho_S \frac{\dot{V}_2}{\pi D_2^2} sin(\alpha)$$

3. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht in Hauptströmungsrichtung:

$$2\pi r\tau dx - 2\pi(r+dr)\left(\tau + \frac{d\tau}{dr}dr\right)dx + 2\pi rpdr - 2\pi r\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)dr$$
$$+\rho_W\ g\ sin\alpha\ 2\pi r\ drdx = 0$$
$$\Rightarrow -r\frac{d\tau}{dr}drdx - \tau drdx - \frac{d\tau}{dr}dr^2dx - r\frac{dp}{dx}drdx + \rho_W\ g\ sin\alpha\ rdrdx = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d(\tau r)}{dr} = \left(-\frac{dp}{dx} + \rho_W\ g\ sin\alpha\right)r$$



Erste Integration liefert:

$$\tau = \frac{r}{2}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_W g sin\alpha\right) + C_1$$

Mit der Randbedingung $\tau(r = 0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Mit dem Newton'schen Ansatz $\tau = -\eta\frac{du}{dr}$ ergibt sich:

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho_W g sin\alpha\right)$$

Nach der zweiten Integration erhält man:

$$u(r) = \frac{r^2}{4\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho_W g sin\alpha\right) + C_2$$

Mit der zweiten Randbedingung $u(r = R) = 0$ folgt $C_2 = -\frac{R^2}{4\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho_W g sin\alpha\right)$.
Das Geschwindigkeitsprofil lautet damit:

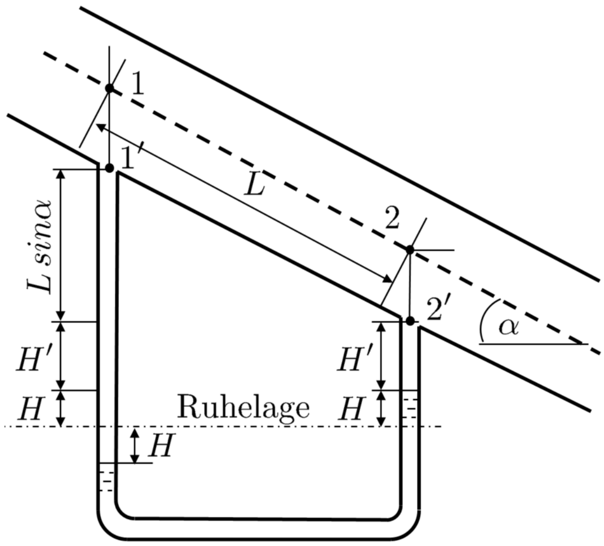
$$u(r) = \frac{R^2}{4\eta}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_W g sin\alpha\right)\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

b) Der Volumenstrom $\dot{V}$ berechnet sich zu:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{R^2}{2\eta}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_W g sin\alpha\right)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R$$
$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_W g sin\alpha\right)$$

Für eine ausgebildete Strömung gilt:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{p_1' - p_2'}{L}$$



b

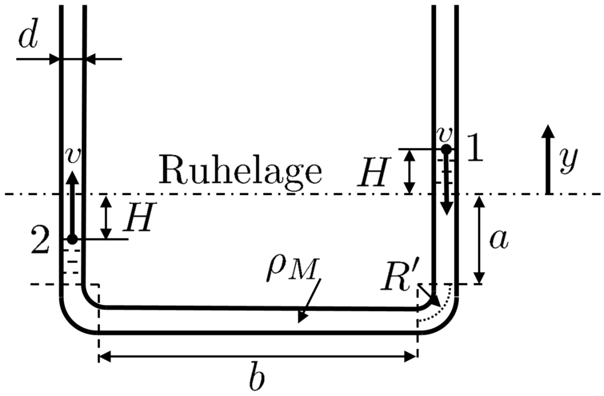
Das hydrodynamische Gleichgewicht für die Mannometerflüssigkeit lautet:

$$p_1' + \rho_W g(2H + H' + Lsin\alpha) = p_2' + \rho_W g H' + \rho_M g\, 2H$$
$$\Rightarrow p_1' - p_2' = 2(\rho_M - \rho_W) g H - \rho_W g L sin\alpha$$

Setzen wir das in den Volumenstrom ein, erhalten wir:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{4\eta L}(\rho_M - \rho_W) g H$$

4. Aufgabe



a) Instationärer Bernoulli von 1 nach 2:

$$\rho_M \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_2 + \frac{\rho_M}{2} v_2^2 + \rho_M\, g\, y_2 = p_1 + \frac{\rho_M}{2} v_1^2 + \rho_M\, g\, y_1$$

Da die Gewichtskraft des Wassers und die Reibung nicht berücksichtigt werden, ergibt sich:

$$p_1 = p_2$$
$$v_1^2 = v_2^2$$

Für die Höhe der Manometerflüssigkeit an den Stellen 1 und 2 gilt somit:

$$y_1 = a + R' + y(t)$$
$$y_2 = a + R' - y(t)$$

Setzen wir das alles ein, vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung zu:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 2\, g\, y$$

Da der Manometerdurchmesser d konstant ist, können wir die Gleichung weiter vereinfachen zu:

$$2\, g\, y = \frac{dv}{dt}\, l \qquad ,$$

wobei $l = 2\, a + b + \pi\, R'$. Mit $v = -dy/dt$ ergibt sich

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\, g}{l}\, y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2\, y = 0$$

die Schwingungsdifferentialgleichung einer harmonischen Bewegung. Laut Aufgabenstellung lautet deren allgemeine Lösung:

$$y \;=\; A\,\cos(wt) \;+\; B\,\sin(wt)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Auslenkung $y(t = 0) = H$ und die Geschwindigkeit $v(t = 0) = v_0$. Zur Bestimmung der beiden Variablen A und B, differenzieren wir die allgemeine Lösung, da:

$$v = -\frac{dy}{dt} \;=\; -\left(-A\omega sin(\omega t) + B\omega cos(\omega t)\right)$$

Setzen wir unsere Randbedingung $v(t = 0) = v_0$ ein, erhalten wir:

$$v_0 = v(t = 0) = -B\omega \qquad \Rightarrow B = -\frac{v_0}{\omega}$$

Für A erhalten wir: $y(t = 0) = H = A$

Somit ergibt sich für den Schwingungsverlauf:

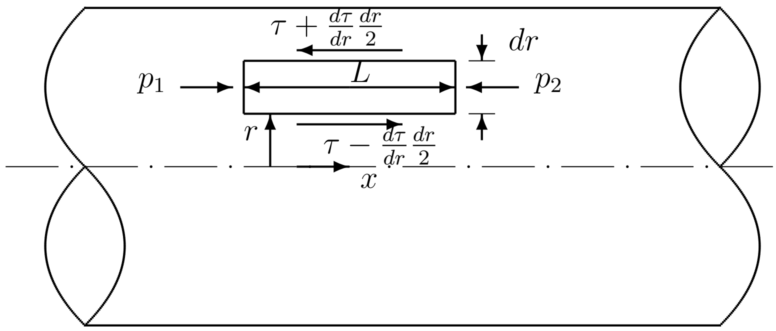
$$y(t) \;=\; H\,\cos(\omega\,t) \;-\; \frac{v_0}{\omega}\,\sin(\omega\,t)$$

bzw. mit der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{2\,g}{2a+b+\pi R'}}$

$$y(t) \;=\; H\,\cos\Big(\sqrt{\frac{2\,g}{2a+b+\pi R'}}\;t\Big) \;-\; \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2\,g}{2a+b+\pi R'}}}\,\sin\Big(\sqrt{\frac{2\,g}{2a+b+\pi R'}}\;t\Big)$$

5. Aufgabe

a)



Das Einsetzen des Newtonschen Zähigkeitsgesetzes $\tau = -\eta d\bar{u}/dr$ liefert:

$$2\pi r L \rho \overline{u'v'} = (p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{d\bar{u}}{dr}$$

bzw.

$$(p_2 - p_1)\frac{r}{2L} = -\rho\overline{u'v'} + \eta\frac{d\bar{u}}{dr}$$

Der Ausdruck $-\rho\overline{u'v'}$ wird turbulente Schubspannung τ_t genannt. Somit setzt sich in der turbulenten Rohrströmung die Schubspannung aus dem molekularen oder laminaren τ_l und dem turbulenten Anteil τ_t

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} + \eta\frac{d\bar{u}}{dr} = \tau_t + \tau_l$$

zusammen.

b) Der Prandtlsche Mischungsweganssatz ist ein Ansatz zur Bestimmung von η_t mit

$$\eta_t = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Die Prandtlsche Mischungwegslänge l ist definiert als die Weglänge, die ein Fluidelement zurücklegt, bis es sich durch den turbulenten Prozess vollständig mit seiner Umgebung vermischt hat und nicht mehr zu identifizieren ist.

Unter Berücksichtigung der mittels der Mischungsweghypothese formulierten turbulenten Schubspannung lautet der Impulssatz der Rohrströmung

$$\frac{p_1 - p_2}{2L}(R - y) = \eta\frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

wobei die Koordinate $y = R - r$ eingeführt worden ist.

c) In einer geringen Entfernung von der Rohrwand sind die laminaren Spannungen gegenüber den turbulenten Spannungen vernachlässigbar. Darüber hinaus setzen wir in Anlehnung an Prandtl voraus, dass über diese sehr dünne Schicht die Spannung τ_t konstant ist und somit der Wandschubspannung τ_w entspricht

$$\tau_w = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad .$$

Da die Schwankungsanteile in unmittelbarer Wandnähe verschwinden bzw. auf der Wand exakt null sind, wird die Mischungslänge proportional zum Wandabstand angesetzt

$$l = ky,$$

so dass

$$\tau_w = \rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

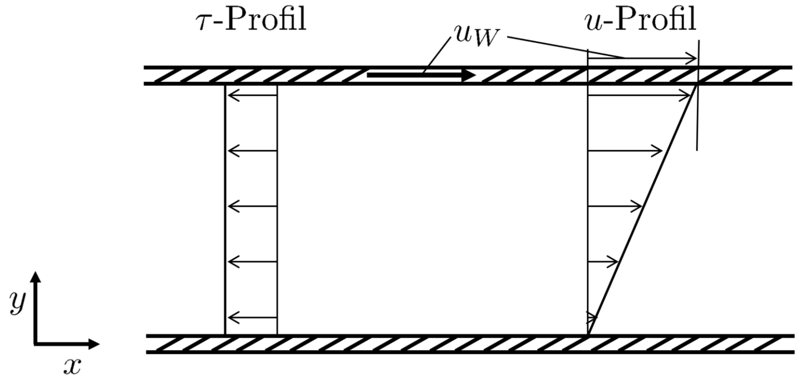
d) Die Schubspannungsgeschwindigkeit ist definiert als

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} \qquad .$$

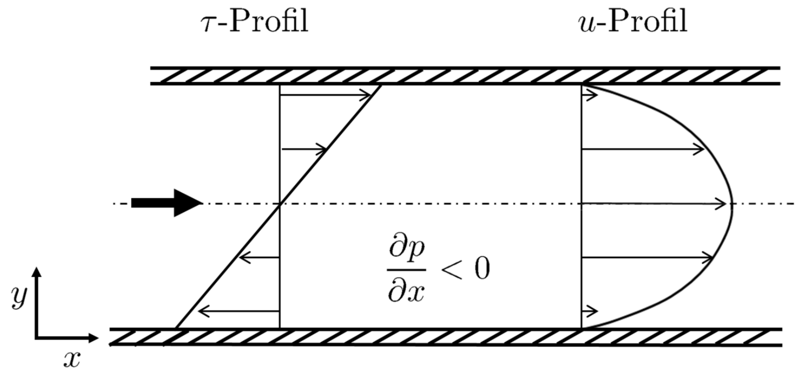
6. Aufgabe

a) Die Profile sehen wie folgt aus:

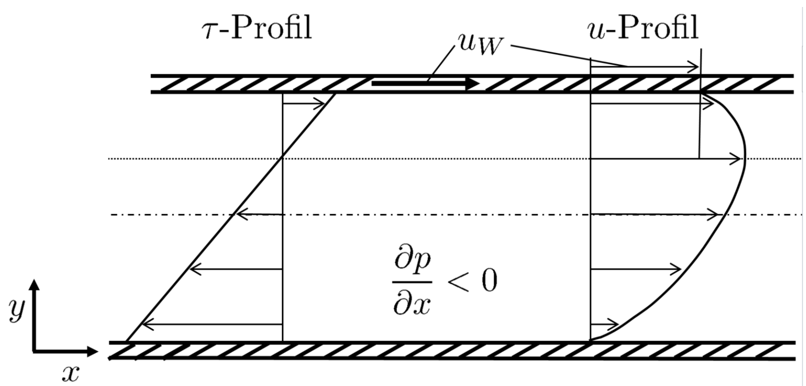
1. Couette-Strömung ohne Druckgradienten:



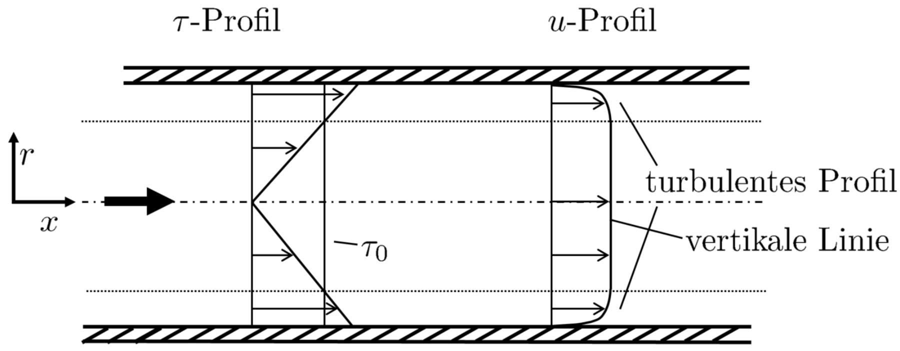
2. Poiseuille-Strömung mit negativem Druckgradienten:



3. Couette-Strömung mit negativem Druckgradienten:



b) Das Schubspannungs- und Geschwindigkeitsprofil für das Bingham-Fluid sieht wie folgt aus:



c) Ein Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Fluidelement liefert:

$$d\tau = \rho(z)g\ sin\alpha\ dy$$

Die Schubspannung berechnet sich per Integration zu:

$$\tau = -\frac{1}{2}\ \frac{\rho_0}{\delta} g\ sin\alpha\ (\delta^2 - y^2)$$

Mit dem Newtonschen Zähigkeitsgesetz $\tau = -\eta(y)\frac{du}{dy}$ und erneuter Integration ergibt sich:

$$u(y) = \frac{1}{4}\frac{\rho_0}{\eta_0 \delta^2} g\ sin\alpha\ \delta^2 \left(y^2 - \frac{y^4}{2\delta^2}\right)$$