

**Klausur „Strömungsmechanik I“**

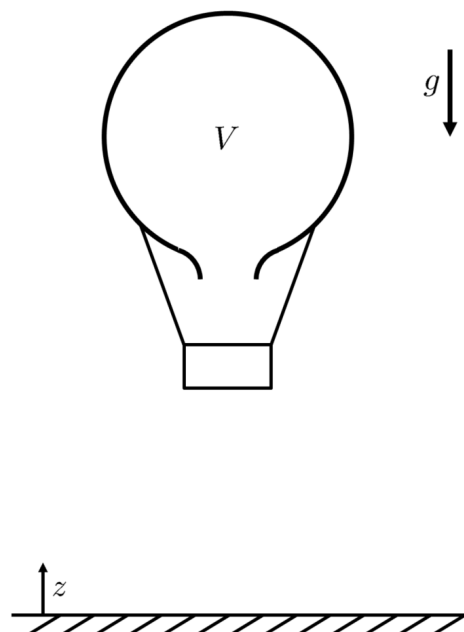
23. 08. 2021

1. Aufgabe (16 Punkte)

Ein Heißluftballon mit dem Volumen  $V$  hat eine feste, unten offene Hülle. Die Struktur des Ballons, d.h. die Hülle inklusive der Nutzlast, hat die Gewichtskraft  $G$ . Er soll in einer Atmosphäre mit folgendem Temperaturverlauf

$$T_L(z) = T_0 - Kz$$

in der Höhe  $z_1$  schweben. Der Druck am Boden beträgt  $p_0$ .



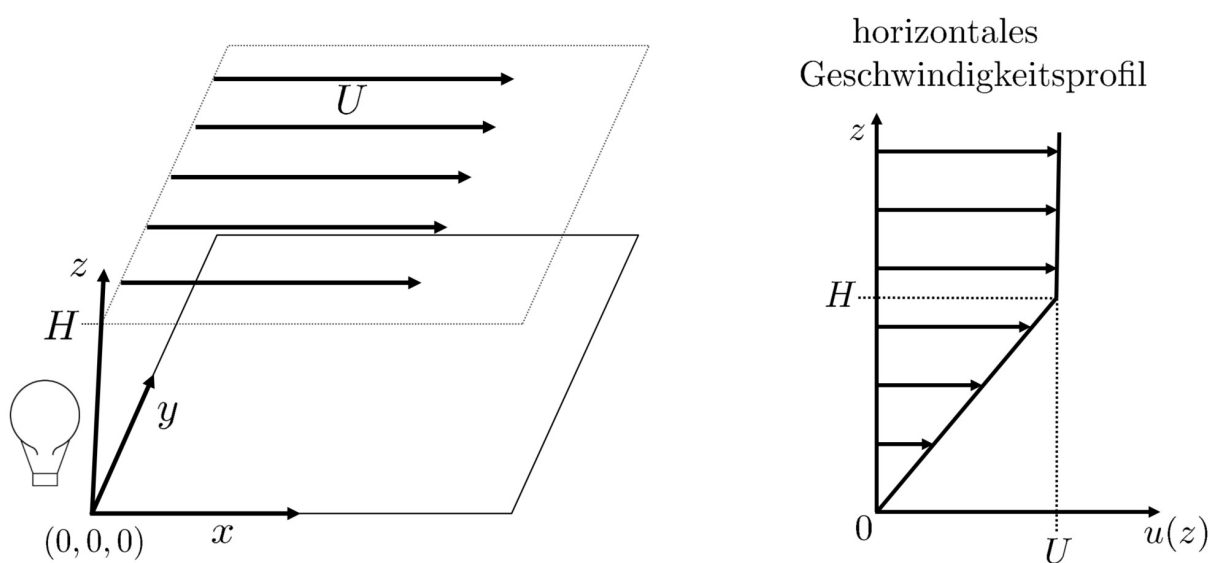
- a) Bestimmen Sie die Temperatur  $T_{HL}(z = z_1)$  im Inneren des Ballons.

Nachfolgend wird die Atmosphäre als isotherm ( $T_L = T_0$ ) angenommen und der Heißluftballon wird nun auf eine konstante Temperatur  $T_{HL}$  geheizt.

- b) Wie hoch steigt nun der Ballon? Die Temperatur  $T_{HL}$  können Sie für diesen Aufgabenteil als gegeben annehmen.

Nachfolgend soll untersucht werden, wie sich der Heißluftballon in der unteren Atmosphäre, die bis zu einer Höhe  $H$  reicht, bewegt. Der Betrag und die Richtung der Windgeschwindigkeit in dieser Atmosphärenschicht hängen dabei von der Höhe  $z$  ab. Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  des Windes in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung können in dieser Schicht mit den folgenden Gleichungen bestimmt werden

$$\begin{aligned} u &= U \cdot \frac{z}{H} \\ v &= U \cdot e^{-\frac{z}{H}} . \end{aligned}$$



$U$  ist hierbei der konstante Geschwindigkeitsbetrag des Windes oberhalb der Höhe  $H$ , der, wie in der Abbildung gezeigt, nur eine Komponente in  $x$ -Richtung besitzt. Nehmen Sie in den weiteren Aufgabenteilen an, dass sich der Heißluftballon in  $x$ - und  $y$ -Richtung ohne Schlupf mit der jeweiligen Windströmung mitbewegt.

- c) Bestimmen Sie die Differentialgleichung und die Funktion der Stromlinien in Abhängigkeit der Höhe für  $z < H$ .
- d) Um welchen Winkel  $\alpha$  weicht die Strömungsrichtung in der Höhe  $z < H$  von der Richtung von  $U$  ab?
- e) Bestimmen Sie die Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  des Bahnlinienvektors des Heißluftballons im Windfeld für den Fall, dass dieser sich zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  am Ort  $(x_0, y_0, 0)$  befindet und mit der konstanten Aufstiegs­geschwindigkeit  $W$  in  $z$ -Richtung aufsteigt.

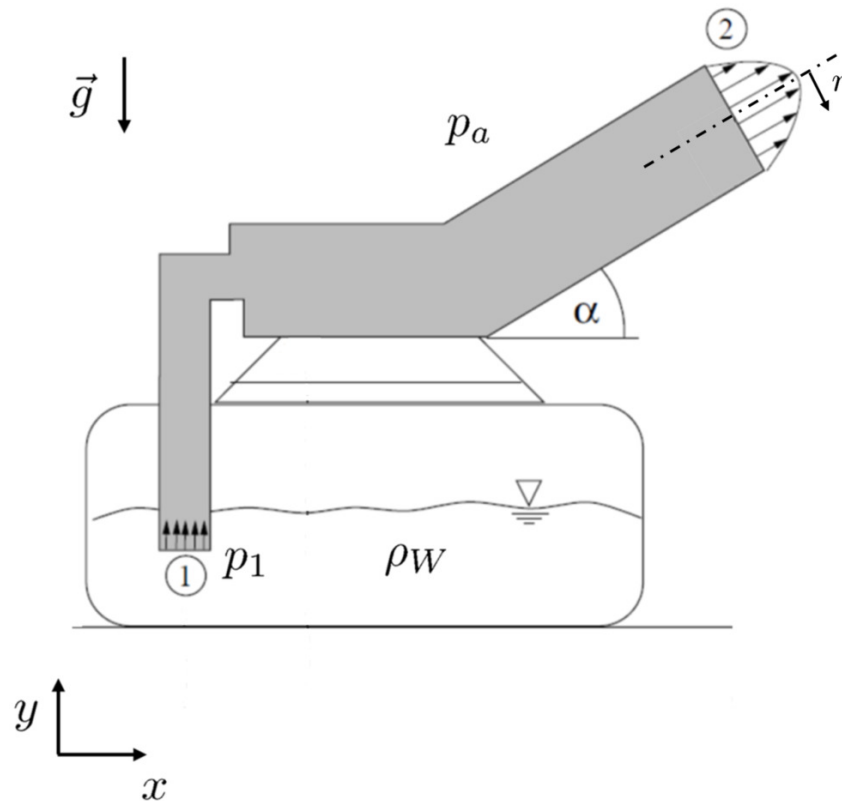
Gegeben:

$$V, \quad G = G_{\text{Hülle}} + G_{\text{Nutz}}, \quad g, \quad R, \quad T_0, \quad p_0, \quad K, \quad z_1, \quad H, \quad U, \quad W, \quad x_0, \quad y_0$$

Hinweise:

- **Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander bearbeitet werden!**
- Luft verhält sich wie ein ideales Gas.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

2. Aufgabe (10 Punkte)



In einer portablen Schneekanone wird über einen Propeller, dessen Einfluss auf das System vernachlässigbar ist, Wasser (Dichte  $\rho_W$ ) zu Schnee (Dichte  $\rho_S$ ) umgewandelt, welcher die Kanone an der Stelle 2 mit einem Volumenstrom  $\dot{V}_2$  verlässt. Aufgrund von Reibungseinflüssen an der Stelle 2 bildet sich am Kanonenausgang ein parabolisches Profil, das über die Formel  $u(r) = a \cdot r^2 + b$  beschrieben wird, aus. Die runden Ein- und Auslassöffnungen haben einen Durchmesser von  $D_1$  und  $D_2$ . Das Gewicht des Wasser-Schneegemisches in der Kanone beträgt  $m_G$ . Die Masse der portablen Kanone soll vernachlässigt werden. An der Stelle 1 herrscht der statische Druck  $p_1$ .

- Welcher Volumenstrom an Wasser wird benötigt, um Schnee mit dem Volumenstrom  $\dot{V}_2$  auswerfen zu können? Welche mittleren Geschwindigkeiten stellen sich an den Stellen 1 und 2 ein? Ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit an der Stelle 2.
- Bestimmen Sie die an der grau hinterlegten Schneekanone (siehe Abbildung) angreifenden Kräfte in  $x$ - und  $y$ -Richtung.

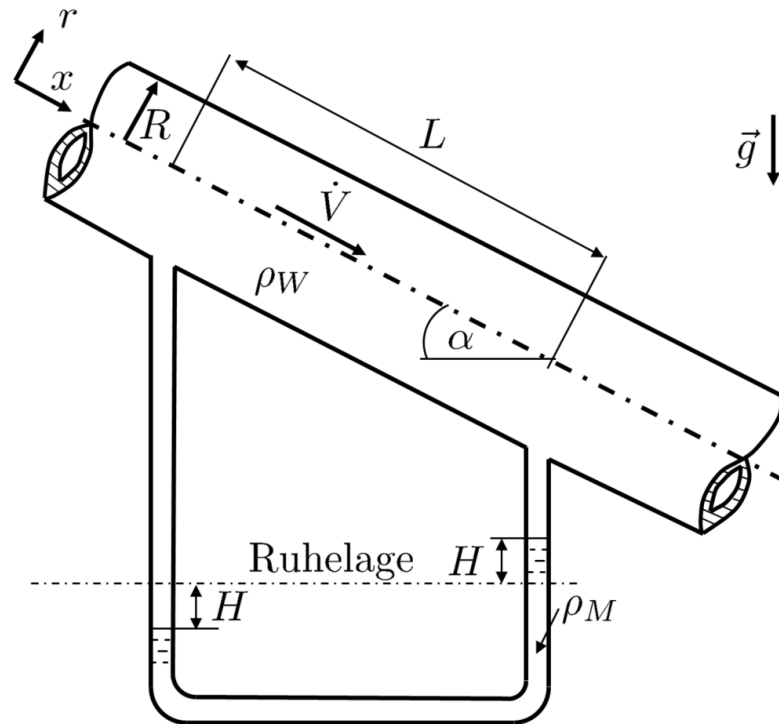
Gegeben:  $\rho_W$ ,  $\rho_S$ ,  $p_a$ ,  $p_1$ ,  $\dot{V}_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $m_G$ ,  $g$ ,  $\alpha$

Hinweise:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

3. Aufgabe (8 Punkte)

Ein um den Winkel  $\alpha$  geneigtes, zylindrisches Rohr wird von Wasser (Dichte  $\rho_W$ ) durchströmt. Das Rohr ist mit einem U-Rohr-Manometer verbunden, in dem sich eine Manometerflüssigkeit ( $\rho_M > \rho_W$ ) befindet. Die Strömung in dem Rohr sei ausgebildet, stationär und laminar.



- Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil  $u(r)$  der Rohrströmung in Abhängigkeit von  $\frac{dp}{dx}$  und  $\alpha$  her.
- In dem U-Rohr-Manometer wird für die Manometerflüssigkeit eine Höhendifferenz von  $2H$  gemessen. Berechnen Sie den Volumenstrom  $\dot{V}$ .

Gegeben:

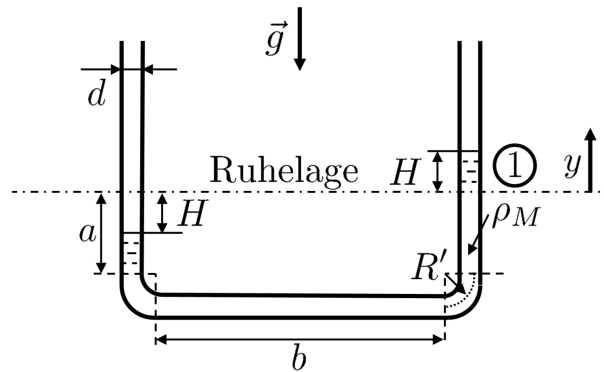
$$R, L, H, \rho_M, \rho_W, \eta, g$$

Hinweis:

- Wasser ist ein Newtonsches Fluid.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

4. Aufgabe (7 Punkte)

Die Manometerflüssigkeit ( $\rho_M$ ) in einem U-Rohr führt eine ungedämpfte, harmonische Schwingung aus. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  besitzt die Manometersäule die Geschwindigkeit  $v(t = 0) = v_0$  entgegen der eingezeichneten  $y$ -Richtung und ist um die Länge  $H$  aus der Ruhelage ausgelenkt.



- a) Bestimmen Sie den Schwingungsverlauf  $y(t)$  an der Stelle 1 unter der Annahme, dass die Reibung und die Gewichtskraft des umgebenden Fluids für diesen Fall vernachlässigbar sind. Leiten Sie hierfür als Erstes die Schwingungsdifferentialgleichung für  $y$  in der Form

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

her und bestimmen Sie die Eigenfrequenz  $\omega$  des Systems.

Gegeben:

$$H, \quad g, \quad v_0, \quad a, \quad b, \quad R'$$

Hinweis:

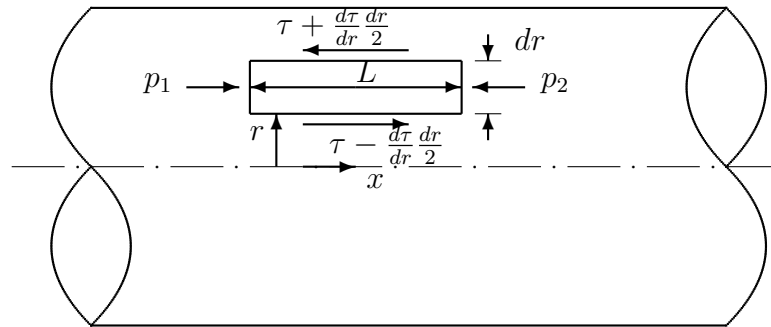
- Die allgemeine Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung lautet:

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

5. Aufgabe (7 Punkte)

Für das dargestellte infinitesimale Rohrelement soll das universelle Wandgesetz für eine turbulente, stationäre und horizontale Rohrströmung untersucht werden.



Das Ergebnis des zeitlich gemittelten Impulssatzes in horizontaler Richtung lautet:

$$\rho 2\pi L r \overline{\rho u'v'} = (p_1 - p_2)\pi r^2 - \tau 2\pi r L$$

- Zeigen Sie anhand der obigen Formel, dass die Schubspannung der turbulenten Rohrströmung einen laminaren und scheinbaren, turbulenten Anteil besitzt. Verwenden Sie hierfür das Newtonsche Zähigkeitsgesetz.
- Erklären Sie kurz, wozu der Prandtlsche Mischungswegansatz dient. Wie kann mit seiner Hilfe die turbulente Viskosität  $\eta_t$  ausgedrückt werden? Erläutern Sie darüber hinaus, wie die Prandtlsche Mischungsweglänge  $l$  definiert ist und setzen Sie diese in Ihre Formel aus Aufgabenteil a) ein. Führen Sie dabei folgende Koordinatentransformation  $y = R - r$  ein, wobei  $R$  dem Radius des Rohres entspricht.
- Leiten Sie unter der Annahme, dass die laminare Schubspannung vernachlässigbar ist und die Mischungsweglänge  $l$  proportional zum Wandabstand ist, einen Zusammenhang für die Wandschubspannung her.
- Definieren Sie die Schubspannungsgeschwindigkeit.

6. Aufgabe (12 Punkte)

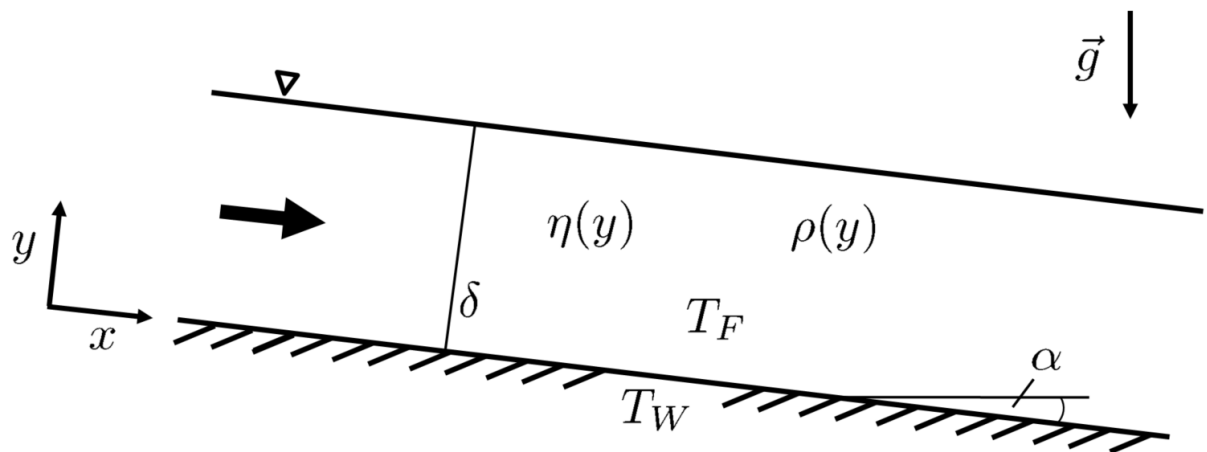
- a) Skizzieren Sie sorgfältig das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung für
1. eine Couette-Strömung ohne Druckgradienten,
  2. eine Poiseuille-Strömung mit negativem Druckgradienten und
  3. eine Couette-Strömung mit negativem Druckgradienten ( $|\frac{dp}{dx}|$  ist so groß, dass  $u(y)$  ein lokales Extremum aufweist).
- b) Skizzieren Sie sorgfältig das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung für ein Bingham-Fluid in einer turbulenten Rohrströmung. Zeichnen Sie ebenfalls die kritische Schubspannung  $\tau_0$  ein.

Eine ausgebildete Gerinneströmung fließt über eine um den Winkel  $\alpha$  geneigte, erhitzte Platte. Es stellen sich folgende, vereinfachte Beziehungen für die Dichte  $\rho$  und die dynamische Viskosität  $\eta$  ein:

$$\rho(y) = \frac{\rho_0}{\delta} y$$

$$\eta(y) = \frac{\eta_0 \delta}{y} ,$$

wobei  $\rho_0, \eta_0$  und die Dicke der Strömung  $\delta$  bekannt sind. Darüber hinaus kann die Schubspannung des Fluids über das Newtonsche Zähigkeitsgesetz abgebildet werden.



- c) Skizzieren Sie sorgfältig das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung für die oben beschriebene Strömung. Berechnen Sie hierfür zunächst die Schubspannungsverteilung  $\tau(y)$  und die Geschwindigkeitsverteilung  $u(y)$ .