

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

05. 08. 2022

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht:

$$F_A = F_G$$

$$\rho_L g V_B + \rho_L g a^3 = \rho_i g V_B + m_G g$$

Ideales Gasgesetz:

$$\rho = \frac{p}{R T} \text{ mit } p_i = p_a(z)$$

Barometrische Höhenformel:

$$\frac{p(z)}{p_0} = \frac{\rho(z)}{\rho_0} \exp\left(-\frac{g z}{R T_0}\right)$$

Einsetzen:

$$g \frac{p_0}{R T_0} \exp\left(-\frac{g h}{R T_0}\right) (a^3 + V_B (1 - \frac{T_0}{T_i})) = m_G g$$

$$h = \frac{R T_0}{g} \ln\left(\frac{\rho_0}{m_G} (a^3 + V_B (1 - \frac{T_0}{T_i}))\right)$$

b) Kräftegleichgewicht:

$$F_A = F_G$$

$$\rho_0 g V_B + a^3 g \rho_W = \rho_i^* g V_B + m_G g$$

Ideales Gasgesetz:

$$\rho_i^* = \frac{p_0}{R T_i^*} \text{ mit } p_i^* = p_0$$

$$\rho_i^* = \rho_0 \frac{T_0}{T_i^*}$$

Einsetzen:

$$V_B \rho_0 \frac{T_0}{T_i^*} = \rho_0 V_B + a^3 \rho_W - m_G$$

$$T_i^* = \frac{V_B \rho_0 T_0}{\rho_0 V_B + a^3 \rho_W - m_G}$$

2. Aufgabe

a) Bernoulli '0'-'K':

$$p_a + \rho g h_0 = p_K + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_K^2$$

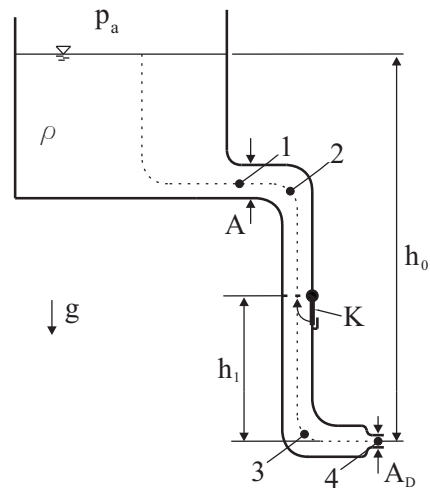
Konti:

$$v_K A = v_D A_D = \sqrt{2gh_0} A_D$$

Bedingung:

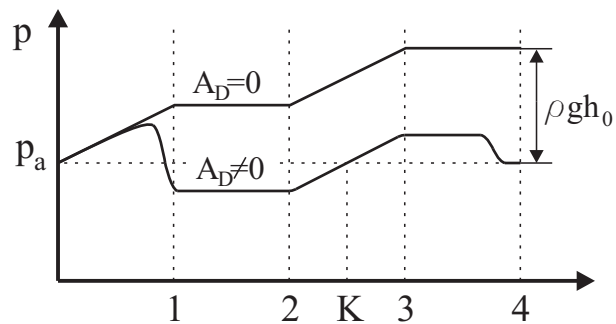
$$p_K = p_a$$

$$\Rightarrow A_D = A \sqrt{1 - \frac{h_1}{h_0}} = \frac{A}{2}$$

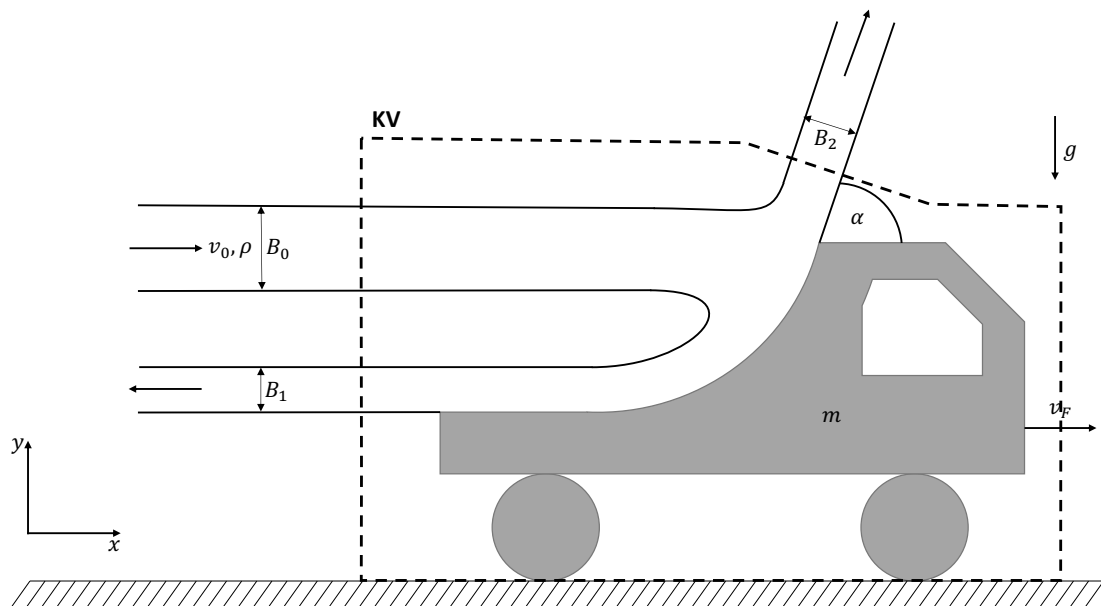


b) $\dot{V} = A_D \sqrt{2gh_0} = \frac{A}{2} \sqrt{2gh_0}$

c)



3. Aufgabe



a) Impulssatz in y-Richtung:

$$\rho T B_2 v_{2,rel}^2 \sin \alpha = F_{ext,y} - m g$$

Bernoulli-Gleichung von $0 \rightarrow 1$ bzw. $0 \rightarrow 2$:

$$p_a + \frac{\rho}{2} v_{0,rel}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_{1,rel}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_{2,rel}^2$$

Daraus ergibt sich:

$$v_{0,rel} = v_{1,rel} = v_{2,rel}$$

Kontinuitaetsgleichung:

$$v_{0,rel} T B_0 = v_{1,rel} T B_1 + v_{2,rel} T B_2$$

$$B_0 = B_1 + B_2 \rightarrow B_2 = B_0 \frac{1}{1+\Gamma}$$

Einsetzen:

$$F_{ext,y} = \rho T B_0 v_{0,rel}^2 \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma} + m g = \rho B_0 (v_0 - v_F)^2 \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma} + m g$$

Die Anpresskraft ergibt sich zu:

$$F_{ab} = -F_{ext,y} = -\rho T B_0 (v_0 - v_F)^2 \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma} - m g$$

b) Impulssatz in x-Richtung:

$$-\rho T B_0 v_{0,rel}^2 - \rho T B_1 v_{1,rel}^2 + \rho T B_2 v_{2,rel}^2 \cos \alpha = F_{ext,x}$$

$$\rho T B_0 v_{0,rel}^2 \left(-1 - \frac{B_1}{B_0} + \frac{B_2}{B_0} \cos \alpha\right) = F_{ext,x}$$

$$\rho T B_0 v_{0,rel}^2 \left(-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos \alpha}{1+\Gamma}\right) = F_{ext,x} = -F_{an}$$

$$F_{an} = -\rho T B_0 (v_0 - v_F)^2 \left(-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos \alpha}{1+\Gamma}\right)$$

c) Es gilt:

$$F_{an} + F_W = 0$$

Einsetzen ergibt:

$$-\rho T B_0 v_{0,rel}^2 \left(-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos \alpha}{1+\Gamma} + C \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma}\right) - C m g = 0$$

$$v_{0,rel} = \pm \sqrt{\frac{C m g}{\rho T B_0 \left(1 + \frac{\Gamma}{1+\Gamma} - \frac{\cos \alpha}{1+\Gamma} - C \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma}\right)}} = v_0 - v_F$$

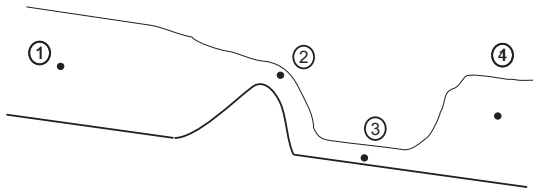
Nur $v_0 > v_F$ physikalisch sinnvoll $\rightarrow +$

$$v_F = v_0 - \sqrt{\frac{C m g}{\rho T B_0 \left(1 + \frac{\Gamma}{1+\Gamma} - \frac{\cos \alpha}{1+\Gamma} - C \frac{\sin \alpha}{1+\Gamma}\right)}}$$

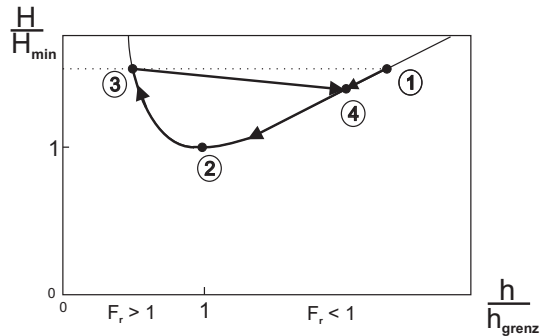
Mit $m = 0$ ergibt sich:

$$v_F^* = v_0$$

4. Aufgabe



a) Zustandsänderungen:



b) Es gilt $H_1 = H_3$, da keine Energiehöhenverluste auftreten

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz}$$

$$\rightarrow H_3 = z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1^2 g}$$

$$H_1 = H_3 \rightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1^2 g} = z_3 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_3^2 g}$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g} \left(\frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_1^2} \right)$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g} \left(\frac{(z_1 + z_3)(z_1 - z_3)}{z_1^2 z_3^2} \right)$$

$$\rightarrow z_1^2 z_3^2 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g} (z_1 + z_3)$$

$$\rightarrow z_3^2 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1^2 g} z_3 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g} = 0$$

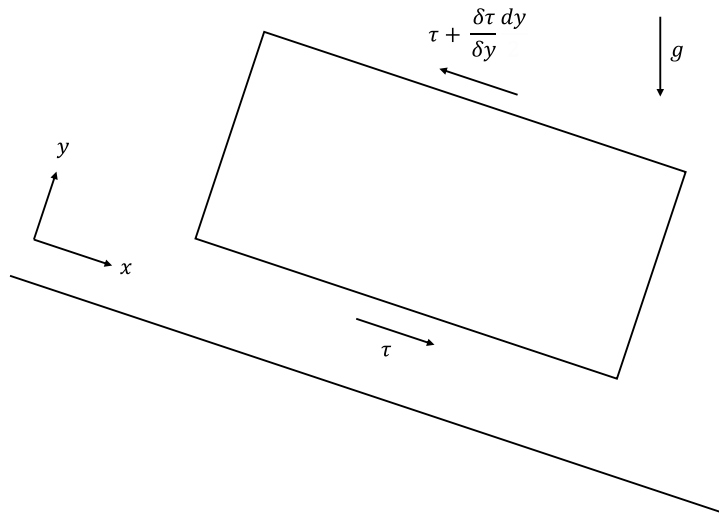
$$\rightarrow z_3 = \frac{\dot{V}^2}{4B^2 z_1^2 g} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{V}^2}{4B^2 z_1^2 g} \right)^2 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g}} \quad (\text{nur pos. Höhen sind sinnvoll} \rightarrow +)$$

$$Fr_3 = \frac{v_3}{\sqrt{gz_3}} \quad \text{mit} \quad v_3 = \frac{\dot{V}}{Bz_3} \rightarrow Fr_3 = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{gz_3^3}}$$

a) Wenn kein Wassersprung auftritt, muss die Energiehöhe konstant bleiben; mit Conti folgt

$$\rightarrow z_1 = z_4$$

5. Aufgabe



a) Mit $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ergibt sich:

$$0 = \tau dx dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz + \rho g \sin \alpha dx dy dz$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho g \sin \alpha$$

Integration:

$$\tau = \rho g \sin \alpha \cdot y + C_1$$

R.B.: $\tau(y = d) = 0 \Rightarrow C_1 = -\rho g \sin \alpha d$

$$\Rightarrow \tau(y) = \rho g (y - d) \sin \alpha$$

Aus Hinweis: $\tau = -K \frac{du}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right|^{-\frac{1}{2}}$

die Geschwindigkeit nimmt für $y > 0$ stetig zu $\Rightarrow \frac{du}{dy} > 0$

also:

$$\tau = -K \left(\frac{du}{dy} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(-\frac{1}{K} \rho g (y-d) \right)^2 \sin \alpha$$

Integration:

$$\begin{aligned} u(y) &= \int \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} (d-y) \right)^2 dy \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} \right)^2 (d-y)^3 + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{R.B.: } u(y=0) = -u_B \Rightarrow C_2 = -u_B + \frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} \right)^2 \cdot d^3$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} \right)^2 [d^3 - (d-y)^3] - u_B$$

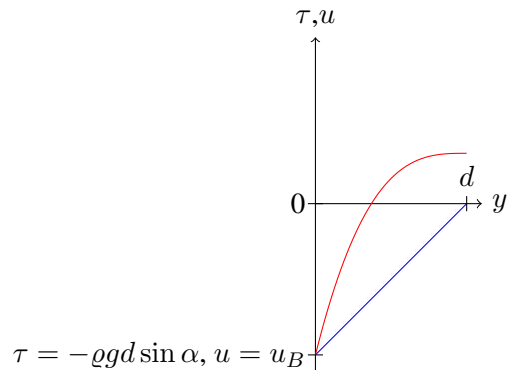
b)

$$\dot{V} = \int_0^d u(y) dy = 0$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} \right)^2 \left[d^3 y + \frac{1}{4} (d-y)^4 \right]_0^d - [u_B y]_0^d$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K} \right)^2 d^3$$

c)

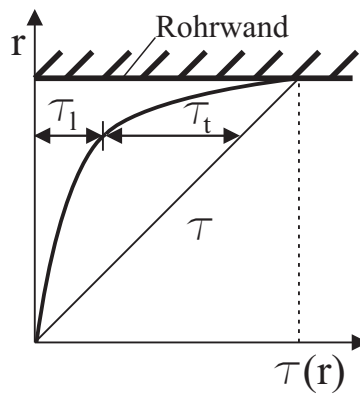


6. Aufgabe

a) Reynoldszahl, mit dem Rohrdurchmesser bzw. den hydraulischen Durchmesser.

$$Re_D = \frac{\rho u_\infty D}{\eta}$$

b) Skizze



c) Eine Stromlinie ist definiert als:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{U_0}{V_0} \frac{e^{-At}}{e^{-Bt}} \frac{y}{H}$$

$$dx = \frac{U_0}{V_0} \frac{e^{-At}}{e^{-Bt}} \frac{y}{H} dy$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0} e^{(A-B)t} \frac{y^2}{H} + C_1$$

Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{A-B}$ gilt $x = 0, y = H$:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0} e^{-1} H$$

Einsetzen ergibt

$$x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0} \frac{1}{e} \left(\frac{y^2}{H} - H \right)$$

d) $y = \int v(t) dt$

$$y = -\frac{V_0}{B} e^{-Bt} + C_2$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $x = y = 0$:

$$C_2 = \frac{V_0}{B}$$

Einsetzen ergibt:

$$y = -\frac{V_0}{B} (e^{-Bt} - 1)$$

Es gilt:

$$x = \int u(y, t) dt$$

$$x = \int U_0 e^{-At} \left(-\frac{V_0}{HB} (e^{-Bt} - 1) \right) dt$$

$$x = \int -\frac{U_0 V_0}{HB} e^{-(A+B)t} + \frac{U_0 V_0}{HB} e^{-At} dt$$

$$x = \frac{U_0 V_0}{B(A+B)} e^{-(A+B)t} - \frac{U_0 V_0}{HBA} e^{-At} + C_3$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $x = y = 0$:

$$C_3 = \frac{U_0 V_0}{HB} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A+B} \right)$$

Einsetzen:

$$x = \frac{U_0 V_0}{HB} \left[\frac{1}{A+B} e^{-(A+B)t} - \frac{1}{A} e^{-At} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A+B} \right) \right]$$