....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

14. 03. 2023

1. Aufgabe

a) Die Auftriebskraft eines Körpers entspricht dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids. $F_A = \rho_f g V_k$, wobei F_A die Auftriebskraft, ρ_f die Dichte des den Körper umgebenden Fluids, g die Erdbeschleunigung, und V_k das Volumen des Körpers bezeichnen.

b) Annahme konstanter Dichte.

c) Druckintegral: $\vec{F} = \int\limits_{A_K} p(z)\vec{n}_A dA$ oder $F_A = -\int\limits_{A_K} p(z) n_{z,A} dA$

Anteile der Flächen parallel zur z-Richtung heben sich gegenseitig auf. Es bleibt
$F_A = -F_z = bt\, p(z_0 + h) - bt\, p(z_0 - h)$.

Allgemein: $p(z) = p_a + \int\limits_0^z \rho(\tilde{z}) g d\tilde{z}$.

Eingesetzt: $p(z) = p_a + g(\rho_0 z + \frac{1}{2}\alpha z^2 + \frac{1}{3}\beta z^3)$

Oberseite: $p_o = p_a + g(\rho_0(z_0 - h) + \frac{1}{2}\alpha(z_0 - h)^2 + \frac{1}{3}\beta(z_0 - h)^3)$

Oberseite: $p_u = p_a + g(\rho_0(z_0 + h) + \frac{1}{2}\alpha(z_0 + h)^2 + \frac{1}{3}\beta(z_0 + h)^3)$

Damit ergibt sich:

$$F_A = (p_u - p_o)bt = btg(2\rho_0 h + \frac{1}{2}\alpha((z_0 + h)^2 - (z_0 - h)^2) + \frac{1}{3}\beta((z_0 + h)^3 - (z_0 - h)^3))$$

d) Mittlere Dichte: $\overline{\rho_f} = \rho_0 + \alpha z_0 + \beta z_0^2$

Volumen des Körpers: $V = bt2h$

Es muss gelten: $F_A = \overline{\rho_f} g V$

$F_A = btg(2\rho_0 h + \frac{1}{2}\alpha(4z_0 h) + \frac{1}{3}\beta(6z_0^2 h + 2h^3))$

$gbt2h(\rho_0 + \alpha z_0 + \beta z_0^2 + \beta\frac{h^2}{3}) = (\rho_0 + \alpha z_0 + \beta z_0^2)gbt2h$

Der Dichteverlauf muss linear sein. Nur für den linearen Verlauf liegt der Mittelwert der Dichte in der Mitte des Körpers $\Rightarrow \beta = 0$.

2. Aufgabe

a) Bernoulli von der Oberfläche des Beckens bis zum Austritt des Rohrs:

$\rho g H + \Delta p = \rho g H + \frac{1}{2}\rho v_{stat}^2$

Daraus ergibt sich direkt:

$v_{stat} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$

b) Bernoulli vom Austritt des Rohrs bis zum Scheitelpunkt der Fontäne:

$\frac{1}{2}\rho v_{stat}^2 = \rho g h$

Mit a) ergibt sich:

$h = \frac{\Delta p}{\rho g}$

c) Bernoulli von der Oberfläche des Beckens bis zum Austritt des Rohrs:

$\rho g H + \Delta p = \rho g H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \int \frac{\partial v}{\partial t} ds$

Großer Behälter: Beschleunigung nur im Rohr:

$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \frac{dv}{dt} L$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{L}(\frac{\Delta p}{\rho} - \frac{1}{2}v^2) = \frac{1}{2L}(v_{stat}^2 - v^2)$

Trennung der Variablen:

$dt = 2L\frac{dv}{v_{stat}^2 - v^2}$

Integration von $t = 0$ bis $t = T_1$ mittels Hinweis:

$T_1 = \frac{L}{v_{stat}} ln(\frac{v_{stat} + 0.5 v_{stat}}{v_{stat} - 0.5 v_{stat}})$

$T_1 = \frac{L}{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}} ln(3)$

d) Bernoulli von der Oberfläche des Beckens bis zum Scheitelpunkt:

$$\rho g H + \Delta p^* = \rho g(H + 2h) + \frac{1}{2}\rho {v^*_{stat}}^2 \lambda \frac{L}{D}$$

Neue Endgeschwindigkeit im Rohr wie in b):

$$v^*_{stat} = \sqrt{2g2h} = \sqrt{\frac{4\Delta p}{\rho}}$$

Es ergibt sich:

$$\Delta p^* = \rho g 2h + \frac{1}{2}\rho\lambda\frac{L}{D}\frac{4\Delta p}{\rho} = 2\Delta p + 2\lambda\frac{L}{D}\Delta p = 2\Delta p(1 + \lambda\frac{L}{D})$$

3. Aufgabe

a) Impulssatz in x-Richtung (Ruhendes Transportband):

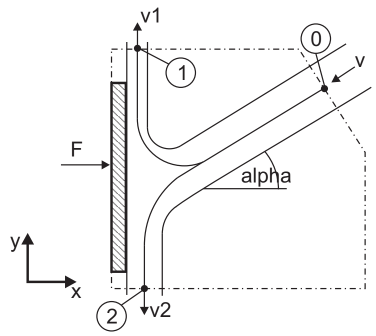
$$\frac{dI_x}{dt} = \rho v^2 \cos(\alpha) BT = F_x$$

$$\Rightarrow \frac{F_x}{T} = \rho v^2 \cos(\alpha) B$$

Kraft auf den Gegenstand:

$$F_x' = -F_x = -\rho v^2 \cos(\alpha) B$$

$$\frac{F_y'}{T} = 0$$



b) verlustfreie Umlenkung:

Bernoulli von 0 nach 1 und 0 nach 2:

$$\Rightarrow p_a + \frac{\rho}{2} v^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2$$
$$\Rightarrow v = v_1 = v_2$$

Konti:

$$vB = v_1 B_1 + v_2 B_2 \Rightarrow B = B_1 + B_2$$

Impulssatz in y-Richtung:

$$\frac{I_y}{dt} = \rho v^2 \sin(\alpha) BT + \rho v^2 B_1 T - \rho v^2 B_2 T$$

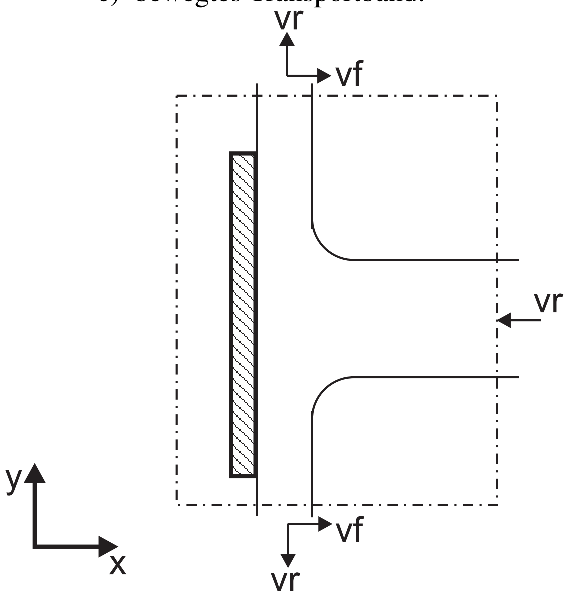
$$v^2 \sin(\alpha) B + v^2 B_1 - v^2 (B - B_1) = 0$$

$$(\sin(\alpha) - 1) B + 2B_1 = 0$$

$$B_1 = \frac{B}{2}(1 - \sin(\alpha))$$

$$B_2 = \frac{B}{2}(1 + \sin(\alpha))$$

c) bewegtes Transportband:



Impulssatz in x-Richtung für bewegte Kontrollfläche:

$$\frac{DI_x}{dt} = \int \rho v_{a,x}(\vec{v_r} \cdot \vec{n}) dA = F_x$$

$$= \rho v v_r B + \rho v_F v_r \frac{B}{2} + \rho v_F v_r \frac{B}{2} = \frac{F_x}{T}$$

$$v_r = v_F - (-v)$$

$$\frac{F_x}{T} = \rho v (v + v_F) B + \rho v_F (v + v_F) B$$

$$\frac{F_x}{T} = \rho (v + v_F)^2 B$$

Kraft auf den Gegenstand:

$$F_x^{'} = -F_x = -\rho (v + v_F)^2 B$$

$$\frac{F_y^{'}}{T} = 0$$

d) $F_{x,c} = 2F_{x,a}$

$\rho(v + v_F^*)^2 B = 2\rho v^2 B \Rightarrow (v + v_F^*)^2 = 2v^2$

${v_F^*}^2 + 2v v_F^* - v^2 = 0 \Rightarrow v_F^* = -v \pm \sqrt{2} v$

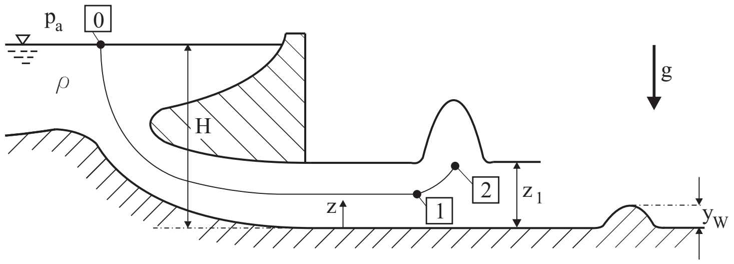
Da $v_F > 0$:

$v_F^* = v(\sqrt{2} - 1)$

<u>4. Aufgabe</u>

a) Bernoulli von $\boxed{0} \to \boxed{1}$: $p_a + \rho g H = p_1 + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2$

Hydrostatische Grundgleichung: $p_1 = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*)$



$$\Rightarrow p_a + \rho g H = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*) + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2 \;\Leftrightarrow\; \rho g (H - z_1) = \frac{\rho}{2} v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - z_1)} \qquad (1)$$

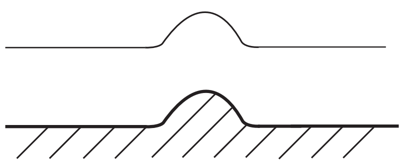
b)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Konti: } v_1 z_1 B_1 = 2 v_2 z_1 \frac{B_1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; v_2 = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Bernoulli von } \boxed{1} \to \boxed{2}: \; \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = 2 \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \end{array}\right\} g z_1 = \frac{v_1^2}{4} \qquad (2)$$

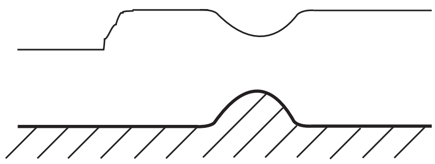
aus (1) + (2): $H = 3 z_1 \quad [m]$

c) $Fr = \frac{v}{\sqrt{gz}} = \sqrt{\frac{2g(H - z_1)}{g z_1}} = 2 > 1 \Rightarrow$ schiessender (überkritischer) Zustand

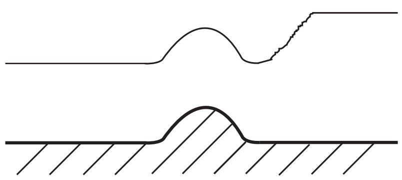
nur schießend



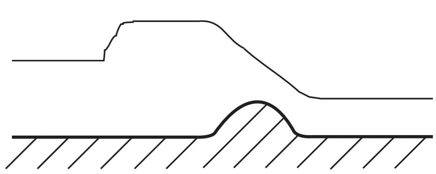
Wassersprung zwischen
Verengung und Bodenwelle



Wassersprung nach
der Bodenwelle



wie oben + Übergang zum
schießenden Zustand



d) Die Energiehöhe H_{nach} nach dem Wassersprung ist:

$$H_{nach} = H_{min} + y_{gr} \text{ mit } H_{min} = \frac{3}{2} z_{gr} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

$$\dot{V} = v_1 z_1 B_1 = \sqrt{4gz_1} z_1 B_1$$

$$H_{nach} = z_{nach} + \frac{v_{nach}^2}{2g} = z_{nach} + \frac{\dot{V}^2}{2gz_{nach}^2 B_1^2}$$

$$= z_{nach} + \frac{4gz_1^3 B_1^2}{2gz_{nach}^2 B_1^2} = z_{nach} + 2z_1 \left(\frac{z_1}{z_{nach}} \right)^2$$

Da $z_{vor} = z_1$ gilt mit dem Hinweis:

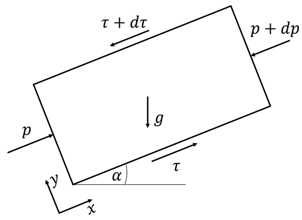
$$z_{nach} = z_1 \left(\sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_1^2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right) z_1$$

$$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4gz_1^3 B_1^2}{gB_1^2}} = \frac{3}{2} z_1 \sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow y_{gr} = H_{nach} - H_{min} = z_1 \left[\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \right] \quad [m]$$

5. Aufgabe

a) Kräftebilanz in x-Richtung:



$$(p - (p + \frac{dp}{dx}dx))dy + (\tau - (\tau + \frac{d\tau}{dy}))dx - \rho g \sin\alpha dxdy = 0$$

$$-\frac{dp}{dx}dxdy - \frac{d\tau}{dy}dxdy - \rho g \sin\alpha dxdy = 0$$

Freie Oberfläche: $\frac{dp}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin\alpha$$

b) 1. Integration:

$$\int_{\tau}^{\tau_o} d\tau = -\int_{y}^{\delta} \rho g \sin\alpha dy$$

Mit $\tau_o = 0$:

$$\Rightarrow \tau = -\eta\frac{du}{dy} = \rho g \sin\alpha(\delta - y)$$

2. Integration:

$$\int_{u_B}^{u} du = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}\int_{0}^{y} (\delta - y)dy$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}(\frac{1}{2}y^2 - \delta y)$$

c) Volumenstrom pro Tiefenausdehnung:

$$\frac{\dot{V}}{T} = \int_{0}^{\delta} u(y)dy$$

$$\frac{\dot{V}}{T} = u_B\delta + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}(\frac{1}{6}\delta^3 - \frac{1}{2}\delta^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{V}}{T} = u_B\delta - \frac{\rho g \sin\alpha}{3\eta}\delta^3$$

d) 1. Integration analog zu b):

$$\tau(y) = \tau_o + \rho g \sin\alpha(\delta - y) = -\eta\frac{du}{dy}$$

2. Integration:

$$\int_{u_B}^{u} du = \int_0^y -\frac{\tau_o}{\eta} - \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}(\delta - y)dy$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B - \frac{\tau_o}{\eta}y + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}(\frac{1}{2}y^2 - \delta y)$$

Volumenstrom pro Tiefenausdehnung:

$$\frac{\dot{V}}{T} = \int_0^\delta u(y)dy$$

$$\frac{\dot{V}}{T} = u_B\delta - \frac{\tau_o}{2\eta}\delta^2 + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}(\frac{1}{6}\delta^3 - \frac{1}{2}\delta^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{V}}{T} = u_B\delta - \frac{\tau_o}{2\eta}\delta^2 - \frac{\rho g \sin\alpha}{3\eta}\delta^3$$

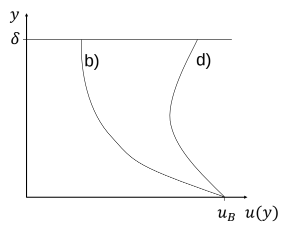
$$\frac{\dot{V}}{T} = \frac{\dot{V}_{alt}}{T} - \frac{\tau_o}{2\eta}\delta^2 = 2\frac{\dot{V}_{alt}}{T}$$

$$\frac{\tau_o}{2\eta}\delta^2 = -u_B\delta + \frac{\rho g \sin\alpha}{3\eta}\delta^3$$

$$\tau_o = -\frac{2\eta u_B}{\delta} + \frac{2}{3}\rho g \sin\alpha\delta = -\frac{1}{2}c_f\rho_L u_L^2$$

$$\Rightarrow u_L = \sqrt{\frac{2}{c_f\rho_L}(\frac{2\eta u_B}{\delta} - \frac{2}{3}\rho g \sin\alpha\delta)}$$

e) Skizze:



6. Aufgabe

a) Zerlegung des Funktionswerts in $f = \overline{f} + f^{'}$

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_T f dt \quad \frac{1}{T}\int_T f^{'} dt = 0$$

$$\overline{fg} = \overline{(\overline{f} + f^{'})(\overline{g} + g^{'})} = \overline{\overline{f}\overline{g}} + \overline{f^{'}\overline{g}} + \overline{\overline{f}g^{'}} + \overline{f^{'}g^{'}}$$

$$\Rightarrow \overline{fg} = \overline{f}\overline{g} + \overline{f^{'}g^{'}}$$

b) Kinematik: $u_1 = u_2$

Kräftegleichgewicht: $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 \frac{du_1}{dy} = \eta_2 \frac{du_2}{dy}$

c) Die zähe Unterschicht ist eine sehr dünne Schicht in unmittelbarer Wandhähe, in der die laminare Schubspannung gegenüber den turbulenten Schubspannung dominiert.

d) $\Sigma M = \displaystyle\int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v})\rho(\vec{v} \cdot \vec{n})dA$