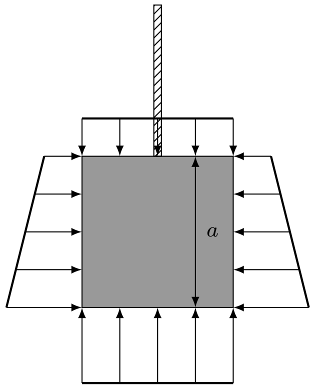
....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

14. 09. 2023

1. Aufgabe

a) Druckverlauf:



b) Oberflächenintegral

$\vec{F} = -\int_A p\, d\vec{A}$

$$\vec{F} = -\left[\underbrace{\int_{links} p\, d\vec{A} + \int_{rechts} p\, d\vec{A}}_{=0} + \underbrace{\int_{vorne} p\, d\vec{A} + \int_{hinten} p\, d\vec{A}}_{=0} + \int_{oben} p\, d\vec{A} + \int_{unten} p\, d\vec{A}\right]$$

$\vec{F} = -\left[\int_{a^2} p_{oben}\, d\vec{A} + \int_{a^2} p_{unten}\, d\vec{A}\right]$

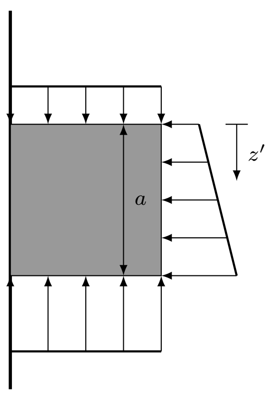
Die hydostatische Grundgleichung liefert:

$p_{oben} = p_a + \rho_W g h_{oben}$ und $p_{unten} = p_a + \rho_W g(h_{oben} + a)$

Einsetzen

$F_A = |\vec{F}| = -a^2[(p_a + \rho_W g h_{oben}) - (p_a + \rho_W g(h_{oben} + a))] = \rho_W g a^3\ (= \rho_W g V_K)$

c) Druckverlauf:



d) Oberflächenintegral:

$$\vec{F} = \underbrace{\int_{links} p\,d\vec{A} + \int_{rechts} p\,d\vec{A}}_{\neq 0} + \underbrace{\int_{vorne} p\,d\vec{A} + \int_{hinten} p\,d\vec{A}}_{=0} + \int_{oben} p\,d\vec{A} + \int_{unten} p\,d\vec{A}$$

Die nach oben gerichtete Auftriebskraft ergibt sich analog zu b) zu

$F_A = \rho_W g a^3$.

Durch den Kontakt zur Wand entsteht eine zur Wand gerichtete Druckkraft

$F_N = \int_A p_{rechts}(z')\,dA$

Die hydrostatische Grundgleichung liefert

$p_{rechts}(z') = p_{oben} + \rho_W g z' = p_a + \rho_W g h + \rho_W g z'$.

Eingesetzt ergibt sich

$F_N = a \int_a (p_a + \rho_W g h + \rho_W g z') dz' = a^2(p_a + \rho_W g h + \frac{1}{2}\rho_W g a)$.

Kräftebilanz um den Würfel führt zu

$0 = F_A + F_R - F_G$,

wobei die Reibungskraft entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

Eingesetzt ergibt sich

$0 = \rho_W g a^3 + \mu F_N - \rho_K g a^3 = \rho_W g a^3 + \mu a^2(p_a + \rho_W g h + \frac{1}{2}\rho_W g a) - \rho_K g a^3$.

Umstellen liefert

$h = \frac{\frac{\rho_K g a^3 - \rho_W g a^3}{\mu a^2} - p_a - \frac{1}{2}\rho_W g a}{\rho_W g} = \frac{a}{\mu}(\frac{\rho_K}{\rho_W} - 1) - \frac{p_a}{\rho_W g} - \frac{1}{2}a$

2. Aufgabe

a) Beschleunigung am Auslass bei $t = 0$, $\frac{\partial v_u}{\partial t} = ?$

Instationärer Bernoulli Umgebung außen (a) $\rightarrow$ Auslass unten (u):

$p_a + \rho \frac{v_a^2}{2} + \rho g(L+h) = p_a + \rho \frac{v_u^2}{2} + \rho \int_a^u \frac{\partial v}{\partial t} ds$

Mit $v = 0$ ergibt sich

$\rho g(L+h) = \rho \int_o^u \frac{\partial v}{\partial t} ds$ und $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}$.

Innerhalb des Beckens gilt immer $v = 0 \Rightarrow \int_a^o \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$ mit (o) am Einlass.

Die Kontinuitẗsgleichung liefert

$v_o A_0 = v(z)A(z) = v_u A_0 e^{-\alpha L} \Rightarrow v(z) = v_u \frac{A_0}{A(z)} \Rightarrow \frac{dv(z)}{dt} = \frac{dv_u}{dt} \frac{A_0 e^{-\alpha L}}{A(z)}$

Einsetzen ergibt schließlich

$\rho g(L+h) = \rho \int_N^u \frac{dv_u}{dt} e^{-\alpha L} e^{\alpha z} ds$

$g(L+h) = \frac{dv_u}{dt} \frac{1}{e^{\alpha L}} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha z}\right]_{z_o=0}^{z_u=L}$

$\Rightarrow \frac{dv_u}{dt} = \alpha g(L+h) \frac{e^{\alpha L}}{e^{\alpha L}-1}$.

b) Stationäre Endgeschwindigkeit am Auslass

Stationärer Bernoulli Umgebung außen (a) $\rightarrow$ Auslass unten (u):

$p_a + \rho \frac{v_a^2}{2} + \rho g(L+h) = p_a + \rho \frac{v_u^2}{2}$

Mit $v_a = 0$ ergibt sich

$v_{u,stat} = \sqrt{2g(L+h)}$.

c) Zeit T bei der $v_u(T) = 0.5 v_{u,stat}$ gilt.

Instationärer Bernoulli von Oberfläche o $\rightarrow$ Ausfluss u

$p_a + \rho \frac{v_a^2}{2} + \rho g(L+h) = p_a + \rho \frac{v_u^2}{2} + \rho \int_a^u \frac{\partial v}{\partial t} ds$

Konti aus a):

$\frac{dv(z)}{dt} = \frac{dv_u}{dt} \frac{A_0 e^{-\alpha L}}{A(z)}$

Einsetzen liefert:

$g(L+h) = \frac{v_u^2}{2} + \frac{dv_u}{dt} \int_o^u \frac{A_0 e^{-\alpha L}}{A(z)} ds = \frac{v_u^2}{2} + \frac{dv_u}{dt} \frac{1}{e^{\alpha L}} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha z}\right]_{z_o=0}^{z_u=L} = \frac{v_u^2}{2} + \frac{dv_u}{dt} \frac{1}{\alpha} \frac{e^{\alpha L}-1}{e^{\alpha L}}$

Einseten von $v_{u,stat}$ und Trennung der Variablen ergibt dann

$dt = \frac{2}{\alpha} \frac{e^{\alpha L}-1}{e^{\alpha L}} \frac{dv_u}{v_{u,stat}^2 - v_u^2}$.

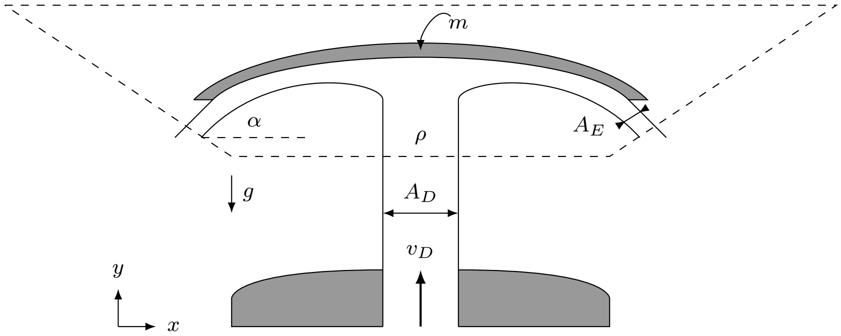
$T = \int_0^T dt = \frac{2}{\alpha} \frac{e^{\alpha L}-1}{e^{\alpha L}} \int_0^{0.5 v_{u,stat}} \frac{dv_u}{v_{u,stat}^2 - v_u^2}$

Mit dem Hinweis und $v_u = x$, $v_{u,stat} = a$ und $|x| < a$ ergibt sich schließlich

$T = \frac{2}{\alpha} \frac{e^{\alpha L}-1}{e^{\alpha L}} \frac{1}{\sqrt{2g(L+h)}} \ln \frac{v_{u,stat} + 0.5 v_{u,stat}}{v_{u,stat} - 0.5 v_{u,stat}} = \frac{2}{\alpha} \frac{e^{\alpha L}-1}{e^{\alpha L}} \frac{1}{\sqrt{2g(L+h)}} \ln 3$

3. Aufgabe

a) Impulssatz im feststehenden Koordinatensystem



y-Richtung

$\frac{dI}{dt} = -\rho A_D v_D^2 - 2\rho v_E^2 A_E \sin\alpha = -mg$

Mit Bernoulli und $p_D = p_E = p_a$ folgt

$v_E = v_D$.

Aus der Symmetrie und Konti folgt außerdem

$A_E = \frac{1}{2} A_D$.

Umgestellt ergibt sich dann

$m = \frac{\rho}{g} v_D^2 A_D (1 + \sin\alpha)$.

b) Impulssatz im mitbewegten Koordinatensystem

y-Richtung

$\frac{dI}{dt} = -\rho A_D v_{D,rel}^{*2} - 2\rho v_{E,rel}^{*2} A_E \sin\alpha = -mg$

Es gilt weiterhin

$A_E = \frac{1}{2} A_D$.

Mit Bernoulli im mitbewegten System und $p_D = p_E = p_a$ folgt

$v_{E,rel}^* = v_{D,rel}^*$.

Umformen und Einsetzen von a) liefert

$\rho v_{D,rel}^{*2} A_D (1 + \sin\alpha) = \rho v_D^2 A_D (1 + \sin\alpha)$

Mit $v_{D,rel}^* = v_D^* + \frac{1}{4} v_D^* = \frac{5}{4} v_D^*$ folgt dann

$\Rightarrow v_D^* = \frac{4}{5} v_D$.

c) Es gilt

$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \rho \vec{v}_{abs} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA$

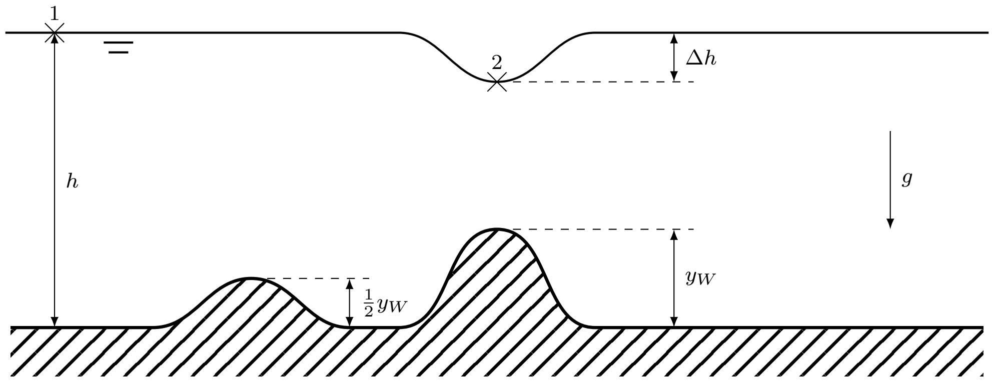
mit $\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel}$ ergibt sich

$\int_{KF} \rho \vec{v}_F (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA + \int_{KF} \rho \vec{v}_{rel} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA$.

Da $\vec{v}_F$ konstant ist, folgt
$\vec{v}_F \int_{KF} \rho(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA = 0$
aus der Massenerhaltung des Systems. Es bleibt
$\int_{KF} \rho \vec{v}_{abs}(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA = \int_{KF} \rho \vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA.$

4. Aufgabe

a) Definition des Volumenstroms:



$\dot{V} = u_1 B h$

Bernoulli von 1 nach 2: $p_a + \rho g h + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_a + \rho g(h_2 + y_W) + \frac{\rho}{2}u_2^2$

Konti: $u_1 h B = u_2 h_2 B \quad u_2 = u_1 \frac{h}{h_2}$

$h = h_2 + y_W + \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = h - y_W - \Delta h$

Einsetzen in Bernoulli Gleichung: $\rho g h + \frac{\rho}{2}u_1^2 = \rho g(h - \Delta h) + \frac{\rho}{2}u_1^2 \frac{h^2}{(h - \Delta h - y_W)^2}$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h^2}{(h-\Delta h - y_W)^2} - 1}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h^2}{(h-\Delta h - y_W)^2} - 1}} B h \qquad \left[\sqrt{\frac{m^2}{s^2}} m^2\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

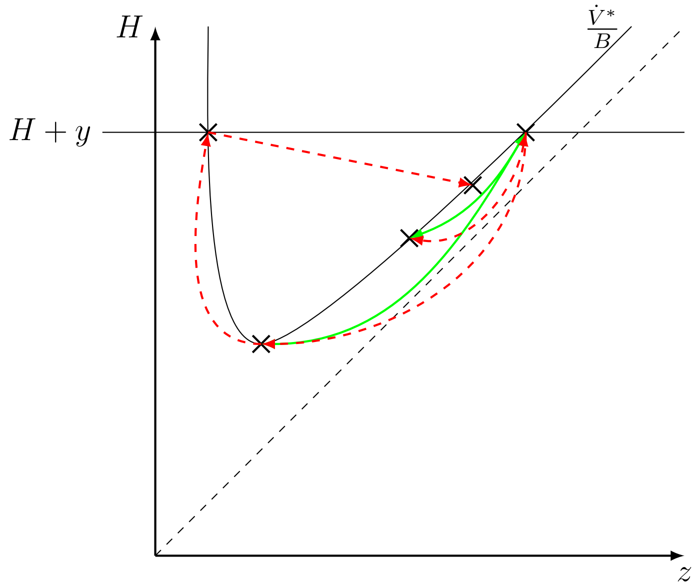
b) Grenzzustand bei $Fr_2 = 1$:

$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$

$\Rightarrow u_2 = \sqrt{g h_2}$

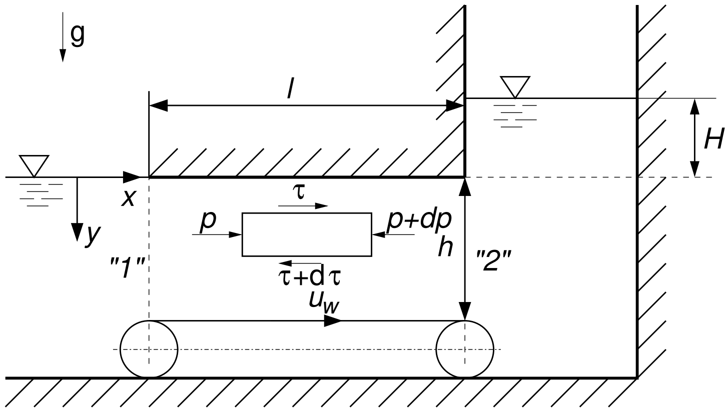
$$\dot{V} = u_2 B h_2 = \sqrt{g(h - y_W - \Delta h)^3} B \qquad \left[\sqrt{\frac{m^4}{s^2}} m\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

c) Energiehöhendiagramm



5. Aufgabe

a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$$\left(p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right)dy + \left(\tau - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right)\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

b) Zweifache Integration

$$\rightarrow \tau(y) = -\frac{\partial p}{\partial x}y + c_1$$

Mit $\tau = -\eta\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\rightarrow u(y) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2\eta}y^2 - \frac{c_1}{\eta}y + c_2$$

Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} y = 0: & u = 0 \\ y = h: & u = u_w \end{array}\right\} \rightarrow c_1 = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}h - \frac{u_w\eta}{h} \quad \text{und} \quad c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \tau(y) = \tfrac{\partial p}{\partial x}(\tfrac{h}{2} - y) - \tfrac{u_w\eta}{h}$$

$$\Rightarrow u(y) = \tfrac{\partial p}{\partial x}\tfrac{1}{2\eta}\left(y^2 - yh\right) + y\tfrac{u_w}{h}$$

c) Maximale Höhe $\rightarrow \quad \dot{V} = 0$

Bernoulli/Hydrostatik :

$$p_2 = p_1 + \rho g H\ , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho g H}{l}$$

$$\rightarrow u(y) = \frac{\rho g H}{2\eta l}\left(y^2 - yh\right) + y\frac{u_w}{h}$$

$$\rightarrow \dot{V} = 0 = \int\limits_0^h \left[\frac{\rho g H}{2\eta l} \left(y^2 - yh \right) + y \frac{u_w}{h} \right] dy$$

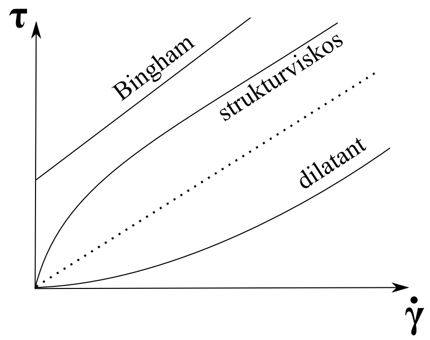
$$\rightarrow 0 = \frac{\rho g H}{2\eta l} \left(-\frac{h^3}{6} \right) + \frac{h u_w}{2}$$

$$\rightarrow H = \frac{6\eta l u_w}{\rho g h^2}$$

6. Aufgabe

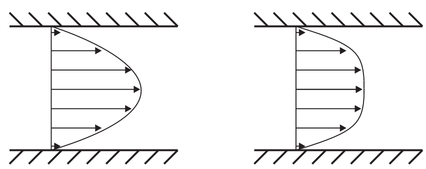
a) • Stromlinie: Die Linien, die tangential zum Geschwindigkeitsfeld verlaufen werden Stromlinien genannt.
   • Bahnlinie: Die Bahnlinie ist die Trajektorie eines speziellen Fluidpartikels in einem Zeitintervall.
   • Rauchlinie: Die Rauchlinie definiert den momentanen Ort der Fluidpartikel, die zu einer vorherigen Zeit denselben festen räumlichen Punkt passiert haben.

b) dilatantes Fluid, strukturviskoses Fluid, Bingham-Plastik



c) $k < y_*$
Die Rauheitsstärke k ist kleiner als die Dicke der viskosen Unterschicht y_*.

d) Laminares (links) und zeitlich gemitteltes, turbulentes (rechts) Geschwindigkeitsprofil



Das turbulente ist völliger als das laminare Geschwindigkeitsprofil, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.