....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik I“

14. 03. 2024

1. Aufgabe

a) $V_K = \frac{1}{3}HA$

$V_K(h) = \frac{1}{3}hA(h)$

Strahlensatz:

$r(h) = r(H)\frac{h}{H} \Rightarrow A(h) = A\frac{h^2}{H^2}$

Auftriebskraft:

$F_A = V_K(h)\rho_W g$

Kräftegleichgewicht:

$F_S + V_K(h)\rho_W g = V_K\rho_B g$

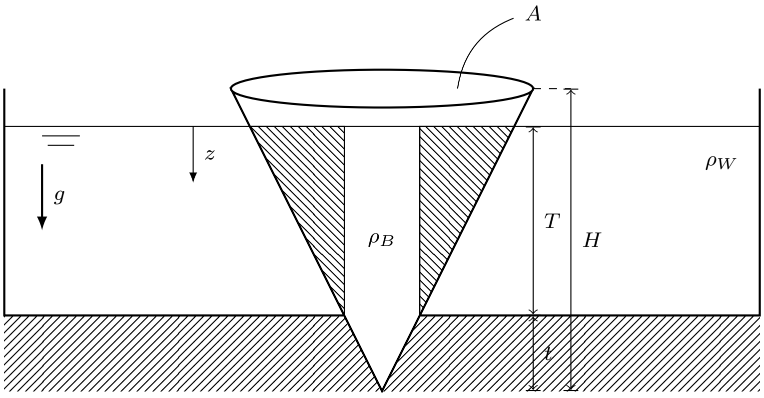
Einsetzen:
$F_S + \frac{1}{3}hA\frac{h^2}{H^2}\rho_W g = \frac{1}{3}HA\rho_B g$

Ergibt:

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{HA\rho_B g - 3F_S}{A\rho_W g}H^2}$$

b)

Skizze des Volumenteils V_A des Kegels, welches im Wasserbecken zum Auftrieb beiträgt:

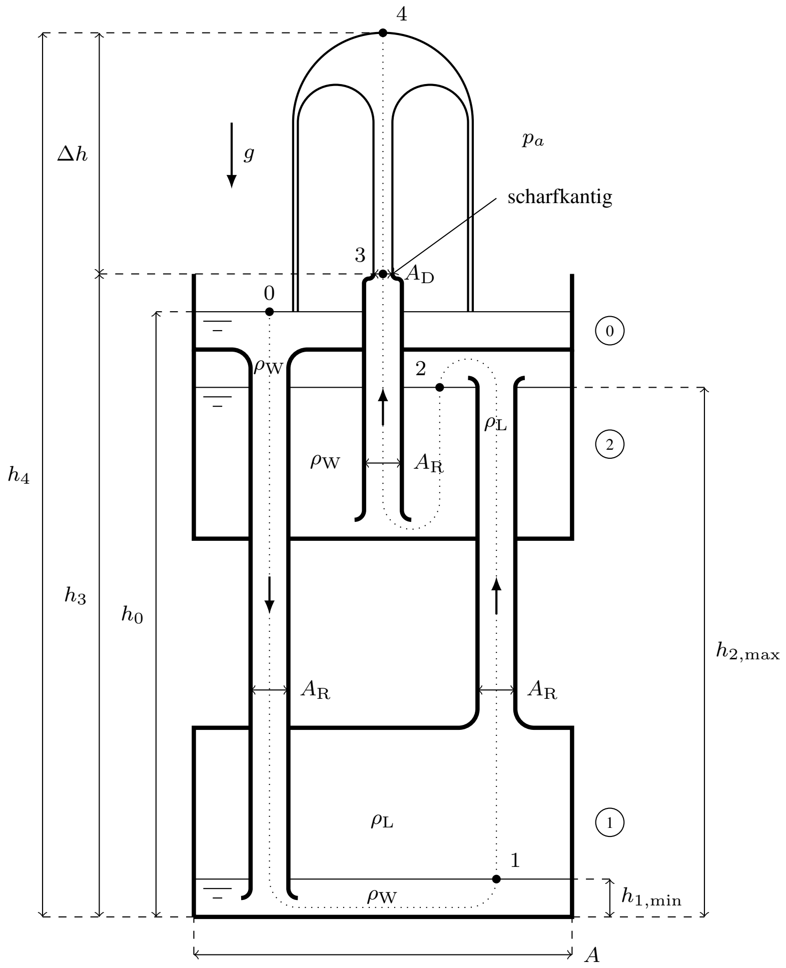


$= V_A$ als das für den Auftrieb im Wasser wirksame Volumen

$$
\begin{aligned}
V_A &= V_K(t+T) - V_K(t) - A(t)T \\
&= \frac{1}{3}A\frac{(t+T)^2}{H^2}(t+T) - \frac{1}{3}A\frac{t^2}{H^2}t - A\frac{t^2}{H^2}T \\
&= \frac{1}{3}\frac{A}{H^2}(t+T)^3 - \frac{1}{3}\frac{A}{H^2}t^3 - A\frac{t^2}{H^2}T \\
&= \frac{1}{3}\frac{A}{H^2}[(t+T)^3 - t^3 - 3t^2T] \\
&= \frac{1}{3}\frac{A}{H^2}T^2(3t+T)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow F_A = \frac{1}{3}\frac{A}{H^2}T^2(3t+T)\rho_W g
$$

2. Aufgabe



a) Bernoulli 0 →1 in Wasser

$\cancelto{p_a}{p_0} + \rho_{\mathrm{W}} g h_0 + \frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cancelto{0}{v_0^2} = p_1 + \rho_{\mathrm{W}} g h_{1,\min} + \frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cancelto{0}{v_1^2}$

$\Rightarrow p_1 = p_a + \rho_{\mathrm{W}} g (h_0 - h_{1,\min})$

1 →2 mit vernachlässigbarer Dichte der Luft

$\Rightarrow p_1 = p_2$

Bernoulli 2 →3 in Wasser

$p_2 + \rho_{\mathrm{W}} g h_{2,\max} + \frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cancelto{0}{v_2^2} = p_3 + \rho_{\mathrm{W}} g h_3 + \frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cancelto{0}{v_3^2}$

$\Rightarrow p_2 + \rho_{\mathrm{W}} g h_{2,\max} = p_3 + \rho_{\mathrm{W}} g h_3$

Einsetzen

$\Rightarrow p_a + \rho_{\mathrm{W}} g (h_0 - h_{1,\min}) + \rho_{\mathrm{W}} g h_{2,\max} = p_3 + \rho_{\mathrm{W}} g h_3$

$\Rightarrow \Delta p = p_3 - p_a = \rho_{\mathrm{W}} g (h_0 - h_{1,\min} + h_{2,\max} - h_3)$

b) Quasistationäre Annahme: $\rho_{\mathrm{W,L}} \int_i^{i+1} \frac{\partial v}{\partial t}\, \mathrm{d}s = 0$ für alle Punkte $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Kinematik für alle Zeitpunkte $t \geq t_0$, wobei t_0 der Zeitpunkt ist, an dem sich die Fontäne ausgebildet hat.

$v_0 = -\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = 0$, da konstante Wasserspiegelhöhe im Auffangbecken
$v_1 = \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} > 0$
$v_2 = -\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} > 0$
$v_4 = 0$, Scheitelpunkt der Fontäne

Hinweis: Im Nachfolgenden werden in der Regel verkürzend $h_1 = h_1(t)$ und $h_2 = h_2(t)$ verwendet.

Konti 1 →2 mit inkompressibler Luft
$(A - A_\mathrm{R})v_1 = (A - 3A_\mathrm{R})v_2$ wobei $A > A_\mathrm{R} > 0$
$\Rightarrow v_1 = \frac{A-3A_\mathrm{R}}{A-A_\mathrm{R}} v_2$
Konti 2 →3
$(A - 3A_\mathrm{R})v_2 = A_\mathrm{D} v_3$
$\Rightarrow v_2 = \frac{A_\mathrm{D}}{A-3A_\mathrm{R}} v_3$
Für Konti 1 →2 gilt dann
$\Rightarrow v_1 = \frac{A_\mathrm{D}}{A-A_\mathrm{R}} v_3$

Bernoulli 0 →1 in Wasser
$\cancelto{p_a}{p_0} + \rho_\mathrm{W} g h_0 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} \cancelto{0}{v_0^2} = p_1 + \rho_\mathrm{W} g h_1 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_1^2$
$\Rightarrow p_a + \rho_\mathrm{W} g h_0 = p_1 + \rho_\mathrm{W} g h_1 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_1^2$
$\Rightarrow p_1 = p_a + \rho_\mathrm{W} g(h_0 - h_1) - \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_1^2$
1 →2 mit vernachlässigbarer Dichte der Luft
$\Rightarrow p_1 = p_2$
Bernoulli 2 →3 in Wasser mit scharfkantigen Auslass an der Düse, also $p_3 = p_a$
$p_2 + \rho_\mathrm{W} g h_2 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_2^2 = \cancelto{p_a}{p_3} + \rho_\mathrm{W} g h_3 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_3^2$
$\Rightarrow p_2 + \rho_\mathrm{W} g h_2 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_2^2 = p_a + \rho_\mathrm{W} g h_3 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_3^2$

Zwischenschritte: Einsetzen von $p_2 = p_1$ in Bernoulli 2 →3 und verwenden von $v_1 = \frac{A_\mathrm{D}}{A-A_\mathrm{R}} v_3$ und $v_2 = \frac{A_\mathrm{D}}{A-3A_\mathrm{R}} v_3$
$\Rightarrow p_a + \rho_\mathrm{W} g(h_0 - h_1) - \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_1^2 + \rho_\mathrm{W} g h_2 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_2^2 = p_a + \rho_\mathrm{W} g h_3 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_3^2$ wobei $\rho_\mathrm{W} > 0$
$\Rightarrow v_3^2 + v_1^2 - v_2^2 = 2g(h_0 - h_1 + h_2 - h_3)$
$\Rightarrow \left[1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-3A_\mathrm{R}}\right)^2\right] v_3^2 = 2g(h_0 - h_1 + h_2 - h_3)$
Mit der Annahme, dass $1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-3A_\mathrm{R}}\right)^2 > 0$, welches für $A > 3A_\mathrm{R}$ und ein dazu passendes A_D hinsichtlich der geometrischen Verhältnisse plausibel ist, ergibt sich:
$$\Rightarrow v_3^2 = 2g \frac{h_0 - h_1 + h_2 - h_3}{1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A-3A_\mathrm{R}}\right)^2}$$

Bernoulli 3 $\rightarrow$4 in Wasser

$\cancelto{p_a}{p_3} + \rho_\mathrm{W} g h_3 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} v_3^2 = \cancelto{p_a}{p_4} + \rho_\mathrm{W} g h_4 + \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} \cancelto{0}{v_4^2}$

$\Rightarrow \Delta h = h_4 - h_3 = \frac{v_3^2}{2g}$

Einsetzen des Ausdrucks für v_3^2

$$\Rightarrow \Delta h(t) = h_4(t) - h_3 = \frac{h_0 - h_1(t) + h_2(t) - h_3}{1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - 3A_\mathrm{R}}\right)^2}$$

Da $h_1(t)$ ebenfalls eine Funktion der Zeit und nicht gegeben ist, muss h_1 über eine integrale Volumenbilanz zum beliebigen Zeitpunkt t und Anfangszeitpunkt t_0 mit h_2 in Beziehung gesetzt werden, wobei das Wasservolumen in der Fontäne V_F vernachlässigbar klein ist und die Rohre und das Auffangbecken immer das gleiche Wasservolumen beinhalten, d.h. $V_\mathrm{R} = \mathrm{const}$ und $V_0 = \mathrm{const.}$

Integrale Volumenbilanz: $\forall t \in [t_0, t_\infty] : \sum_i V_i(t) = \sum_i V_i(t_0)$

$\Rightarrow \cancel{V_0} + V_1(t) + V_2(t) + \cancel{V_\mathrm{R}} + \cancelto{0}{V_\mathrm{F}(t)} = \cancel{V_0} + V_1(t = t_0) + V_2(t = t_0) + \cancel{V_\mathrm{R}} + \cancelto{0}{V_\mathrm{F}(t = t_0)}$

$\Rightarrow (A - A_\mathrm{R})(h_1(t) - H_1) + (A - 3A_\mathrm{R})(h_2(t) - H_2)$

$... = (A - A_\mathrm{R})(h_1(t = t_0) - H_1) + (A - 3A_\mathrm{R})(h_2(t = t_0) - H_2)$

Die jeweiligen Höhen der Behälterböden H_1 und H_2, die eingeführt werden können, kürzen sich heraus und mit $h_1(t = t_0) = h_{1,\min}$ und $h_2(t = t_0) = h_{2,\max}$ ergibt sich:

$\Rightarrow (A - A_\mathrm{R})h_1(t) + (A - 3A_\mathrm{R})h_2(t) = (A - A_\mathrm{R})h_{1,\min} + (A - 3A_\mathrm{R})h_{2,\max}$

$$\Rightarrow h_1(t) = h_{1,\min} + \frac{A - 3A_\mathrm{R}}{A - A_\mathrm{R}} \big(h_{2,\max} - h_2(t)\big)$$

Insgesamt folgt dann:

$$\Rightarrow \Delta h(t) = h_4(t) - h_3 = \frac{h_0 - h_{1,\min} - \frac{A - 3A_\mathrm{R}}{A - A_\mathrm{R}}\big(h_{2,\max} - h_2(t)\big) + h_2(t) - h_3}{1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - 3A_\mathrm{R}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta h(t) = \frac{h_0 - h_{1,\min} - \frac{A - 3A_\mathrm{R}}{A - A_\mathrm{R}} h_{2,\max} + \left[1 + \frac{A - 3A_\mathrm{R}}{A - A_\mathrm{R}}\right] h_2(t) - h_3}{1 + \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - A_\mathrm{R}}\right)^2 - \left(\frac{A_\mathrm{D}}{A - 3A_\mathrm{R}}\right)^2}$$

3. Aufgabe

a) Bernoulli 0 →1

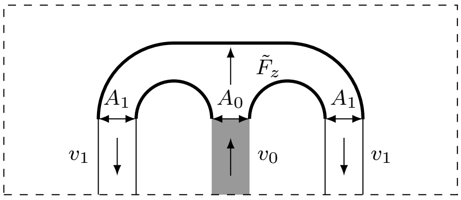
$p_0 + \frac{\rho}{2}v_0^2 = p_a + \frac{\rho}{2}v_1^2$

Konti 0 →1

$v_0 A_0 = 2v_1 A_1 \Rightarrow v_0 = 2v_1 \frac{A_1}{A_0}$

$p_0 - p_a = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \frac{\rho}{2}v_1^2 \left[1 - 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2\right]$

Impulssatz um Fluid in z-Richtung:



$-\rho A_0 v_0^2 - 2\rho A_1 v_1^2 = A_0(p_0 - p_a) + \tilde{F}_z$

$\tilde{F}_z$: Kraft vom Hoverboard auf das Fluid

$F_z = -\tilde{F}_z$: Kraft vom Fluid auf das Hoverboard

$\tilde{F}_z = A_0(p_0 - p_a) - \rho A_0 4v_1^2(\frac{A_1}{A_0})^2 - 2\rho A_1 v_1^2 = -F_z$

$$F_z = A_0 \rho v_1^2 \left[\frac{1}{2}\left(1 - 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2\right) + 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + 2\frac{A_1}{A_0}\right]$$

b) Bernoulli Pumpe →1

$p_h = p_a + \rho g(H + h) + \frac{\rho}{2}v_1^2 - \Delta p$

Mit hydrostatischer Grundgleichung (HGG):

$p_h = p_a + \rho g h$

Eingesetzt ergibt sich:

$\Delta p = \rho g H + \frac{\rho}{2}v_1^2$

Im Gleichgewicht für die Person mit Hoverboard mit Gesamtmasse m gilt:

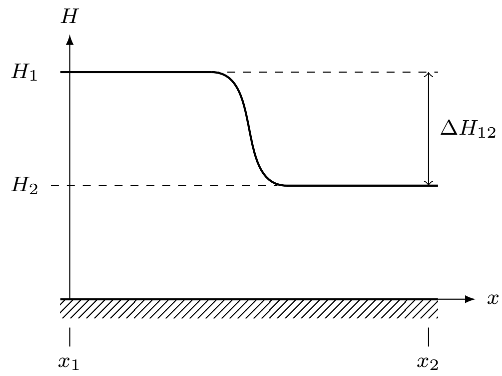
$F_z = mg$

Eingesetzt folgt:

$$\Delta p = \rho g H + \frac{mg}{A_0}\frac{1}{1 - 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + 8\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + 4\frac{A_1}{A_0}}$$

4. Aufgabe

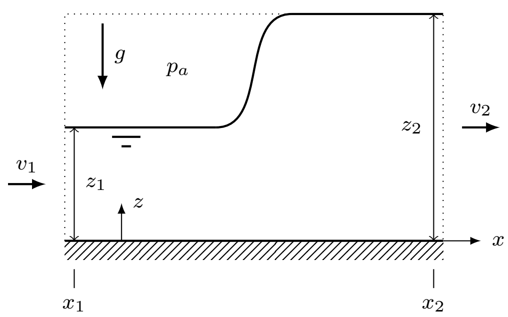
a) Skizze des Verlaufs der Energiehöhe:



Qualitativer Verlauf des Graphs

Benennen der Zustände H_1 und H_2 an den dazugehörigen Stellen x_1 und x_2 und Kennzeichnen des Energiehöhenverlusts ΔH_{12}

b) Impulserhaltungssatz (IES) in x-Richtung: $\dfrac{dI_x}{dt} = \sum\limits_i F_{x,i}$



$$-\rho v_1^2 z_1 B + \rho v_2^2 z_2 B = B p_a (z_2 - z_1) + B \left(\int\limits_0^{z_1} p_a + \rho g z \, \mathrm{d}z - \int\limits_0^{z_2} p_a + \rho g z \, \mathrm{d}z \right)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{g} \left(v_2^2 z_2 - v_1^2 z_1 \right) = \left(\dfrac{z_1^2}{2} - \dfrac{z_2^2}{2} \right)$, wobei sich B und p_a herauskürzen

Konti 0 $\rightarrow$1: $B v_1 z_1 = B v_2 z_2 \Rightarrow v_1 z_1 = v_2 z_2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{g} \left(\dfrac{v_1^2 z_1^2}{z_2} - v_1^2 z_1 \right) = \dfrac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2)$

$\Rightarrow \dfrac{v_1^2 z_1}{g z_2} (z_1 - z_2) = \dfrac{1}{2}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$ mit $z_1 \neq z_2$

$\Rightarrow \dfrac{v_1^2 z_1}{g z_2} = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$, wobei $z_2 \neq 0$

$$\Rightarrow z_2^2 + z_1 z_2 - 2\frac{v_1^2 z_1}{g} = 0$$

Mit der Definition der Froude-Zahl $Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g z_1}}$ an der Stelle x_1 folgt:

$$\Rightarrow z_2^2 + z_1 z_2 - 2 Fr_1^2 z_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow z_{2_{1,2}} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + 2 Fr_1^2 z_1^2}$$

Einzige physikalisch sinnvolle Lösung: $z_2 = \frac{z_1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2}\right) > 0$

c) Mechanischer Energiesatz bzw. Bernoulli entlang der Wasseroberfläche unter Berücksichtigung des Energiehöhenverlusts ΔH_{12}:

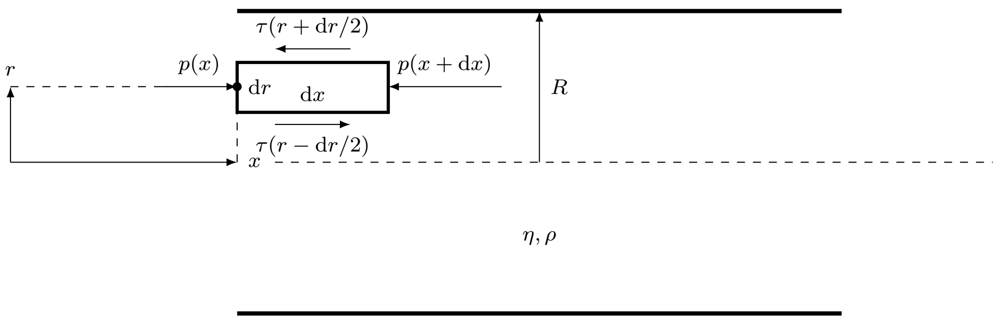
$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_1^2 z_1^2}{2g z_2^2} + \Delta H_{12}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{12} = z_1 \left(1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right)\right)$$

5. Aufgabe

a) Geschwindigkeitsverteilung durch Impulserhaltungssatz (IES) in x-Richtung am differentiellen Volumenelement unter der Annahme von Rotationssymmtrie um die Rohrachse:



IES am differentiellen Volumenelement in x-Richtung:

$$\tau(r-\mathrm{d}r/2)\,2\pi\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}x-\tau(r+\mathrm{d}r/2)\,2\pi\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}x\,...$$
$$...+p(x)\,2\pi r\mathrm{d}r-p(x+\mathrm{d}x)\,2\pi r\mathrm{d}r=0$$

mit den Taylor-Reihen mit Enwicklungspunkt mit den Koordinaten (x,r), welcher als Punkt in der obigen Skizze gekennzeichnet ist

$$\tau(r\mp\mathrm{d}r/2)=\tau(r)\mp\mathrm{d}\tau/2=\tau(r)\mp\frac{\mathrm{d}\tau(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{2}$$

$$p(x+\mathrm{d}x)=p(x)+\mathrm{d}p=p(x)+\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 0=-\left(\tau+r\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r}\right)-r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

Finale Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}(r\tau)}{\mathrm{d}r}=-r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

1.Integration:

$$\tau r=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{r^2}{2}+c_1$$

$$\Leftrightarrow \tau=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{r}{2}+\frac{c_1}{r}$$

mit Randbedingung für Symmetrie bezüglich der Mittellinie bei $r = 0$, d.h. $\tau(r = 0) = 0$, folgt:

$$c_1 = 0 \Rightarrow \tau(r) = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{r}{2}$$

Newtonsche Fließgesetz:

$$\Rightarrow \tau(r) = -\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{r}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

2.Integration:

$$u_2(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}r^2 + c_2$$

mit Randbedingung für die Haftbedingung bei $r = R$, d.h. $u_2(r = R) = 0$, folgt:

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow u_2(r) = u_2\left(\frac{r}{R}\right) = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Nun wird der Druckgradient $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ über die Konstanz der Volumenströme $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} = \mathrm{const}$ bestimmt:

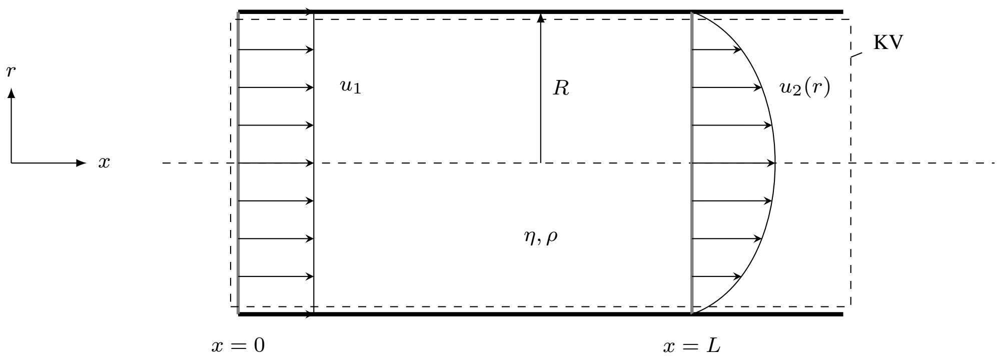
$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= u_1\pi R^2\\
\dot{V}_2 &= \int_{A_2} u_2\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^R u_2(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2\int\limits_0^1 u_2\left(\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}\,\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right)\\
&= 2\pi R^2\int\limits_0^1 -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R}\,\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_1\pi R^2 = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{8u_1\eta}{R^2}$$

Geschwindigkeitsprofil:

$$\Rightarrow u_2(r) = 2u_1\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

b) Skizze des Kontrollvolumens:



Impulserhaltungssatz (IES):

$-\dot{I}_{ein} + \dot{I}_{aus} = \Delta p\, \pi R^2 - F_r$

mit

$\Delta p = p_1 - p_2$

$F_r = \frac{1}{2}\big(\tau_{Wand}(x=0) + \tau_{Wand}(x=L)\big) 2\pi R L$

$\tau_{Wand}(x=L) = -\eta\, \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R} = 4\eta \frac{u_1}{R}$

$\tau_{Wand}(x=0) = C \cdot \tau_w(x=L)$

folgt für die Reibungskraft

$\Rightarrow F_r = \tau_{Wand}(x=L) \cdot (C+1)\pi R L$

und mit

$$\dot{I}_{ein} = -\rho u_1^2 \pi R_1^2 \text{ und } \dot{I}_{aus} = 2\pi\rho R^2 \int_0^1 u_2^2\left(\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}\,\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{4}{3}\pi R^2 \rho u_1^2$$

folgt

$\Rightarrow \rho\frac{u_1^2 \pi R^2}{3} = \Delta p \pi R^2 - \pi R L (C+1) 4\eta \frac{u_1}{R}$

$\Rightarrow \Delta p = 4\eta \frac{u_1 L (C+1)}{R^2} + \rho\frac{u_1^2}{3}$

6. Aufgabe

a) Gegebene differentieller Impulsbilanz in z-Richtung:
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{mit } g = \mathrm{const}$$

Luftphase:

Einsetzen des idealen Gasgesetzes $\rho_\mathrm{L} = \frac{p}{R_\mathrm{L} T}$ mit $R_\mathrm{L} = \mathrm{const} > 0$ und $T > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{pg}{R_\mathrm{L} T}$$

Trennung der Variablen und Einarbeiten der Randbedingung $p(z = 0) = p_a$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{p} = -\frac{\partial z}{R_\mathrm{L} T}$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{p}(z=0)=p_a}^{p(z)} \frac{\partial \overline{p}}{\overline{p}} = -\int_{\overline{z}=0}^{z} \frac{g\,\partial \overline{z}}{R_\mathrm{L} T}$$

Annahme der isothermen Atmosphäre einarbeiten, d.h. $T = \mathrm{const}$ und somit $\frac{g}{R_\mathrm{L} T} = \mathrm{const}$, und Integrale lösen

$$\Rightarrow \left[\ln|p|\right]_{p_a}^{p(z)} = -\frac{g}{R_\mathrm{L} T}(z - 0)$$

$$\Rightarrow \ln|p(z)| - \ln|p_a| = -\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{p(z)}{p_a}\right| = -\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z$$

$$\Rightarrow \left|\frac{p(z)}{p_a}\right| = \mathrm{e}^{-\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z}$$

Da $p(z), p_a > 0$ gilt, können die Betragsstriche weggelassen werden

$$\Rightarrow \frac{p(z)}{p_a} = \mathrm{e}^{-\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z}$$

$$\Rightarrow p(z) = p_a \mathrm{e}^{-\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z} \text{ für } z \geq 0$$

Wasserphase:

Verwenden der Annahme eines inkompressibles Fluids, $\rho_\mathrm{W} = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_\mathrm{W} g = \mathrm{const}$$

$$\Rightarrow \partial p = -\rho_\mathrm{W} g\,\partial z$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{p}(z=0)=p_a}^{p(z)} \partial \overline{p} = \int_{\overline{z}=0}^{z} -\rho_\mathrm{W} g\,\partial \overline{z}$$

$$\Rightarrow p(z) - p_a = -\rho_\mathrm{W} g z$$

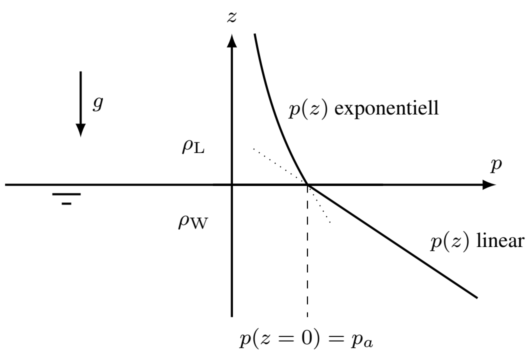
$$\Rightarrow p(z) = -\rho_\mathrm{W} g z + p_a \text{ für } z < 0$$

Skizze des Verlaufs des statischen Drucks:

$$p(z) = \begin{cases} p_a \mathrm{e}^{-\frac{g}{R_\mathrm{L} T} z} & x \geq 0 \text{ in Luft} \\ -\rho_\mathrm{W} g z + p_a & 0 < x \text{ in Wasser} \end{cases}$$

$$-\rho_\mathrm{L} g = -\frac{p_a g}{R_\mathrm{L} T} = \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{\mathrm{L}} > \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{\mathrm{W}} = -\rho_\mathrm{W} g$$

da $\rho_\mathrm{L} < \rho_\mathrm{W}$



Exponentieller Verlauf mit entsprechender Krümmung für die Luftphase und linearer Verlauf mit entsprechender Steigung für die Wasserphase

Stetigkeit bei $z = 0$ mit $p(z = 0) = p_a$ und qualitativ im Verhältnis stehende Steigungen bei $z = 0$ für die Luft- und Wasserphase

b) In stationären Strömungen fallen Stromlinie, Bahnlinie und Rauchlinie zusammen.

c) Die Reynolds'sche Zerlegung beschreibt die Strömungsgröße f als Summe aus zeitlichem Mittelwert $\overline{f}$ und Schwankungsanteil f', wobei die Argumente $\vec{\boldsymbol{r}}$ für die Orts- und t für die Zeitabhängigkeit stehen.

$$f(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \overline{f}(\vec{\boldsymbol{r}}) + f'(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$$

Die Reynolds'sche Mittelung ist durch die zeitlich-integralen Mittelung über ein hinreichend langes Zeitintervall Δt nach folgender Definitionsgleichung gegeben.

$$\overline{f}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \, \mathrm{d}t$$

d) Mit der Hilfe der Rechenregeln für die Reynolds'sche Mittelung kann der gesuchte Ausdruck wie folgt hergeleitet und vereinfacht werden, wobei im Allgemeinen $\overline{f'g'} \neq 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\overline{fg} &= \overline{(\overline{f} + f')(\overline{g} + g')} && \text{, ausmultiplizieren} \\
&= \overline{\overline{f}\,\overline{g} + f'\,\overline{g} + \overline{f}\,g' + f'g'} \\
&= \overline{\overline{f}\,\overline{g}} + \overline{f'\,\overline{g}} + \overline{\overline{f}\,g'} + \overline{f'g'} && \text{, da Additivität gilt, } \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}. \\
&= \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'}\,\overline{g} + \overline{f}\,\overline{g'} + \overline{f'g'} && \text{, da } \overline{f} \text{ und } \overline{g} \text{ zeitlich konstant sind und } \overline{\overline{f}} = \overline{f}. \\
&= \overline{f}\,\overline{g} + \cancelto{0}{\overline{f'}}\,\overline{g} + \overline{f}\,\cancelto{0}{\overline{g'}} + \overline{f'g'} && \text{, wobei } \overline{f'g'} \neq 0 \\
\Rightarrow \overline{fg} &= \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}
\end{aligned}
$$